

1906.

LIBRARY  
MICHIGAN STATE NORMAL  
COLLEGE.

N 8.

# ANNALEN DER PHYSIK.

BERGÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 19. HEFT 8.

DER GANZEN REIHE 324 BÄNDER 8. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSbesONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1906.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 2. März 1906.)

# In h a l t.

	Seite
1. A. Byk. Die Zustandsgleichungen in ihren Beziehungen zur Thermodynamik . . . . .	441
2. W. Kaufmann. Über die Konstitution des Elektrons. (Hierzu Taf. IV, Figg. 10 u. 11.) . . . . .	487
3. W. Seitz. Die Wirkung eines unendlich langen Metallzyinders auf Hertzsche Wellen. II . . . . .	554
4. Peter Paul Koch. Beobachtungen über Elektrizitätsleitung an Kristallen durch nicht homogene und homogene Deformation . . . . .	567
5. Emil Kohl. Über die Bewegungsgleichungen und die elektromagnetische Energie der Elektronen . . . . .	567
6. Ludwig Tessé. Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches . . . . .	613
7. A. Miethe. Über die Färbung von Edelsteinen durch Radium . . . . .	633
8. F. Richardz. Der Wert des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen für ein Gemisch zweier Gase, insbesondere für ozonhaltigen Sauerstoff . . . . .	689
9. E. Warburg. Bemerkung zu der Arbeit des Hrn. Delere über die Wärmeentwicklung bei zyklischer Magnetisierung von Eisenkernen . . . . .	649
10. P. H. Eykman. Schutzvorrichtung für die Kauffmannsche Luftpumpe . . . . .	645
11. Edmund Nimmer. Ein neues Verfahren zur photographischen Fixierung der Aufzeichnungen von Stimmgabeln, der Falkkörper von Fallmaschinen, von Meteorographen etc. . . . .	647

Manuskripte sind an den Herausgeber, Professor Dr. P. Drude, zu senden. Seine Adresse ist Berlin N.W. 7, Neue Wilhelmstr. 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzusiefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzusiechnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in dem „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 19.

*1. Die Zustandsgleichungen  
in ihren Beziehungen zur Thermodynamik;  
von A. Byk.*

Die Methode der reinen Thermodynamik ist dadurch gekennzeichnet<sup>1)</sup>), daß sie von einigen allgemeinen Erfahrungssätzen, wesentlich von den beiden Hauptsätzen der Wärmelehre, ausgeht, um aus ihnen auf rein logischem Wege eine Reihe neuer Sätze der Physik und Chemie herzuleiten. Neben den beiden Hauptsätzen spielt unter diesen Erfahrungstatsachen wohl die größte Rolle diejenige, welche die Existenz sogenannter Zustandsgleichungen betrifft. Erfahrungsgemäß ist in einer homogenen Masse durch die Angabe der „Zustandsgrößen“ Dichte und Temperatur bei gegebener chemischer Beschaffenheit im Gleichgewicht auch der Druck mitbestimmt. Hiervon wird in der Thermodynamik ein sehr umfangreicher Gebrauch gemacht. Schon die Ausführung des Carnotschen Kreisprozesses in seiner üblichen Form<sup>2)</sup> setzt die Existenz einer Zustandsgleichung und zwar in der speziellen Form derjenigen der Gase voraus. Ein solcher Prozeß tritt nun auch an verschiedenen Stellen bei der Formulierung des zweiten Hauptsatzes auf. Dieser erscheint bei Hrn. Planck in verschiedenen Formen, die aber alle auf die Erfahrungstatsache zurückgeführt werden können, daß es möglich ist, Prozesse, bei denen die Reibung eine Rolle spielt, vollständig rückgängig zu machen. Dabei wird vom Carnotschen Prozeß in der Weise Gebrauch gemacht, daß man mit seiner Hilfe die Irreversibilität der Wärmeleitung auf die genannte Grundform des zweiten Hauptsatzes reduziert.<sup>3)</sup> In dem Beweise des zweiten Hauptsatzes

1) Vgl. M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik. 2. Aufl. Leipzig 1905. p. V.

2) Vgl. M. Planck, l. c. p. 60.

3) l. c. p. 79.

figuriert von allem Anfang an die Zustandsgleichung der Gase, und in der Tat werden bei der Ableitung des Ausdrückes für die Entropieänderungen durch Änderungen der Temperatur und des Volumens<sup>1)</sup> ( $dS = dU + p dV/T$ ) wenigstens für die Wärmebehälter die Eigenschaften idealer Gase, also Zustandsgleichungen, vorausgesetzt. Da an diesen Ausdruck auch die thermodynamische Definition der Temperatur anknüpft<sup>2)</sup>, so ist auch diese an die Existenz von Zustandsgleichungen gebunden; die Definition der Temperatur mit Hilfe des Gasthermometers ist es natürlich erst recht.

Ebenso wie in den allgemeinen Ableitungen wird auch bei den Anwendungen der Thermodynamik auf spezielle Gleichgewichtszustände die Existenz von Zustandsgleichungen benutzt. Man findet im speziellen Teil von Hrn. Plancks Vorlesungen<sup>3)</sup> zu Anfang jedes Kapitels eine Angabe über Anzahl und Art der unabhängigen Variablen, und zwar ist deren Zahl stets so weit beschränkt, daß nur unter Einführung einer Zustandsgleichung das System durch sie vollständig bestimmt werden kann. Die Einführung der genannten Gleichung erfolgt denn auch immer in der einen oder anderen Form. Insbesondere ist vielleicht zu erwähnen, daß, wie in einer demnächst in der Zeitschrift für physik. Chemie erscheinenden Arbeit ausgeführt werden soll, die Annahme von Zustandsgleichungen in jeder Phase speziell für die Ableitung der Phasenregel sich als notwendig erweist.

Angesichts der Rolle, die die Zustandsgleichung in der Thermodynamik spielt, und der Sorgfalt, mit der man sich bemüht hat beide Hauptsätze auf ihre einfachste und allgemeinste Form zu bringen, wird man sich fragen können, ob denn diese dritte Voraussetzung in der Tat eine letzte Erfahrung darstellt oder ob es nicht möglich ist, sie durch gewisse allgemeinere und einfachere Aussagen zu ersetzen. Diese Aussagen müssen natürlich wieder reine Erfahrungssätze darstellen und dürfen keine Hypothesen irgendwelcher Art, sei es mechanischer, sei es elektromagnetischer Natur, enthalten.

Das Postulat der Existenz von Zustandsgleichungen drückt

1) I. e. p. 96.

2) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1899. p. 473.

3) p. 117 ff.

die Notwendigkeit eines Zusammenhanges zwischen gewissen Parametern aus, die sich alle auf ein und dasselbe Medium beziehen; dieses Medium selbst kann irgend eines der unendlich vielen denkbaren chemisch verschiedenen Medien sein. Wir werden offenbar eine Vereinfachung erzielen, wenn wir unseren Satz auf einen solchen über den erfahrungsgemäßen Zusammenhang gewisser Parameter in einem einzigen, besonders einfachen Medium zurückführen können. Das Medium mit den einfachsten Eigenschaften, das wir kennen, in dem uns der gesetzmäßige Zusammenhang aller darin vorkommenden Parameter auf Grund allgemeiner Erfahrungssätze genau bekannt ist, ist das Vakuum. Die Parameter, die in ihm überhaupt auftreten, sind die Vektoren elektrische Kraft, magnetische Kraft sowie Schwerkraft. Das Verhalten dieser Vektoren wird durch die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum einerseits, durch das Newtonsche Gravitationsgesetz andererseits ausgedrückt. Wir wollen uns also die Aufgabe stellen, die Notwendigkeit der Existenz von Zustandsgleichungen auf diese Erfahrungssätze zurückzuführen. Weiterhin werden wir noch von Erfahrungssätzen Gebrauch zu machen haben, welche das Gleichgewicht an der Grenzfläche eines leeren Raumes und eines wägbaren Körpers regeln; endlich werden wir uns der beiden Hauptsätze der Thermodynamik selbst bedienen können, da es sich ja darum handelt, *neben* ihnen weitere Erfahrungen einzuführen. Dabei ist natürlich darauf zu achten, daß auch hier nicht etwa implizite die Zustandsgleichung wieder eingeführt wird. Man darf also z. B., wenn man den zweiten Hauptsatz in seiner Grundform anwendet, ihn nicht gleichzeitig in der Form benutzen, die die Irreversibilität der Wärmeleitung ausspricht; denn diese ist ja, wie erwähnt, nur mit Hilfe der Zustandsgleichung auf die Grundform zurückzuführen.

Für chemisch einheitliche Substanzen schreibt man die Zustandsgleichung, die Beziehung zwischen Druck, Dichte und Temperatur, in der Form  $p = f(v, T)$ . Für Gemische wird in der Formel in verschiedener Weise der Menge der einzelnen chemischen Verbindungen Rechnung getragen. Hr. Nernst<sup>1)</sup> formuliert in diesen Fällen die Zustands-

1) W. Nernst, Lehrb. d. theoret. Chemie. 2. Aufl. Stuttgart 1895.  
p. 564.

gleichung  $F(c_1, c_2 \dots p, T) = 0$ , wobei  $c_1, c_2$  etc. die Anzahl Grammoleküle pro Liter der einzelnen chemischen Verbindungen bedeutet. Hr. Riecke<sup>1)</sup> gibt dieselbe Form der Gleichung, nur mit dem Unterschiede, daß die Masse bei ihm in Grammen, nicht in Molen gemessen wird. Hr. Planck<sup>2)</sup> macht die Annahme, daß der Zustand einer Phase, z. B. also auch das Gesamtvolumen, durch die Massen der in ihr enthaltenen unabhängigen Bestandteile und außerdem durch Druck und Temperatur bestimmt sei; er modifiziert sie<sup>3)</sup> bez. des inneren Zustandes dahin, daß die diesen betreffenden Größen, etwa die Dichte, außer von Druck und Temperatur nur noch von den Mengenverhältnissen der unabhängigen Bestandteile untereinander abhängen. Die letztergenannte Annahme macht auch Hr. Wind<sup>4)</sup>, wobei er die Mengenverhältnisse in Molen mißt, während Hr. Planck dafür Gramme als Maß benutzt. Diese ganzen Formen, insbesondere die Nernstsche und Plancksche, werden sich als im Grunde identisch herausstellen.

### Ableitung der Zustandsgleichung für chemisch einheitliche Substanzen.

Wir betrachten zunächst chemisch einheitliche Substanzen. Eine solche denken wir uns in eine adiabatische Hülle eingeschlossen und warten die Herstellung des Gleichgewichtes ab. Man erhält auf diese Art ein möglicherweise aus mehreren Phasen bestehendes System. Aus diesem werde jetzt ein Volumen  $V$  abgegrenzt, das sich vollständig innerhalb einer und derselben Phase befindet. Diesem abgegrenzten Teil kommt dann ein bestimmtes Volumen  $V$ , eine Masse  $M$ , eine Energie  $U$ , eine Temperatur  $T$  und ein Druck  $p$  zu.

Wir wollen nun beweisen, daß in dem kleineren abgegrenzten Raum (nur von diesem soll fortan die Rede sein) der Wert des Druckes durch die chemische Natur der Substanz und außerdem durch die Größen  $M, V, T$  bestimmt ist. Wir werden dabei zweckmäßig so verfahren, daß wir zunächst nicht

1) E. Riecke, Zeitschr. f. physik. Chemie 6. p. 273.

2) M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik 2. Aufl. p. 171.

3) I. c. p. 176.

4) C. H. Wind, Zeitschr. f. physik. Chemie 31. p. 392.

diese drei Größen, sondern vielmehr  $M, V, U$  als unabhängige Variable wählen. Wenn wir dann die notwendige Existenz zweier Beziehungen von der Form  $T = f_1(M, V, U)$  und  $p = f_2(M, V, U)$  nachweisen können, so werden wir imstande sein aus diesen beiden die Energie zu eliminieren und so zu der gewünschten Zustandsgleichung zu gelangen.

#### A. Abhängigkeit der Temperatur von Masse, Volumen und Energie.

Wir müssen zunächst die Existenz einer Relation

$$T = f_1(M, V, U)$$

begründen. Nimmt man  $M, V, U$  als gegeben an, so ist es denkbar, daß entweder durch sie die Temperatur in, sei es eindeutiger, sei es mehrdeutiger Weise, mitbestimmt sei oder daß über diese noch frei verfügt werden könne. Im ersten Falle wird eine Beziehung von der angegebenen Form bestehen, im zweiten Falle nicht. Können wir nun, wie im folgenden geschehen soll, nachweisen, daß die Annahme, wir dürften in diesem Falle frei über die Temperatur verfügen, zu einem Widerspruch gegen den zweiten Hauptsatz führt, so werden wir per exclusionem schließen, daß der erste Fall zutrifft; es muß dann also eine Beziehung von der genannten Form in der Tat existieren.

Es scheint auf den ersten Blick sehr leicht, zu einer solchen deductio ad absurdum zu kommen. Folgendes Verfahren könnte man für zulässig halten. Von einem Wärmereservoir mit der Temperatur  $T_1 > T$  läßt man eine bestimmte Wärmemenge durch Leitung auf unsere Substanz übergehen und erhöht dann deren Temperatur willkürlich auf  $T_2 > T_1$ . Dann könnte die betreffende Wärmemenge durch Leitung auf das Reservoir zurückgehen, und man hätte den Prozeß der Wärmeleitung im Widerspruch zum zweiten Hauptsatz rückgängig gemacht. Aber dieses Beweisverfahren ist aus verschiedenen Gründen unzulässig. Einmal dürfen wir, wenn wir nicht implizite die Zustandsgleichung einführen wollen, nicht den zweiten Hauptsatz in der Form anwenden, in der er die Irreversibilität der Wärmeleitung ausspricht; wir dürfen das deshalb nicht, weil wir im folgenden noch von ihm in seiner

Grundform Gebrauch zu machen haben werden. Dann aber führen wir mit dem Temperaturbegriff nach dem früheren ja zunächst auch noch einmal implizite die Zustandsgleichung ein. Endlich kann man nicht ohne weiteres voraussetzen, daß ein Übergang bei konstantem  $M, V, U$  von einer Temperatur zur anderen, wenn er möglich ist, sich auch ohne äußere Änderungen vollziehen lassen kann.<sup>1)</sup>

Wir müssen also zunächst die Temperatur unabhängig von der Zustandsgleichung definieren. Bei dieser Gelegenheit wird sich zugleich ein Prozeß ergeben, welcher gestattet, die Irreversibilität der Wärmeleitung auf die Grundform des zweiten Hauptsatzes zurückzuführen, ohne von der Zustandsgleichung eines materiellen Körpers Gebrauch zu machen. Es bleibt dann, um unseren indirekten Beweis schlüssig zu machen, nur noch übrig nachzuweisen, daß Temperaturänderungen im System, wenn sie überhaupt möglich wären, auch ohne äußere Änderungen vor sich gehen können.

Eine rein elektromagnetische Definition der Temperatur, die unabhängig von jeder Zustandsgleichung ist, hat Hr. Planck für das strahlungserfüllte Vakuum gegeben.<sup>2)</sup> Dabei wächst für ein Vakuum, das sich in stationärem Zustande befindet, die Energiedichte der Strahlung mit der Temperatur.<sup>3)</sup> Dann läßt sich leicht mit Hilfe des Lichtdruckes zeigen, daß der Übergang von Strahlung von höherer zu niedriger Energiedichte bez. Temperatur gestattet, eine bestimmte Quantität Strahlungsenergie in Arbeit umzusetzen. Es empfiehlt sich aber hier diesen Beweis in anderer Weise zu führen, als das Hr. Wien<sup>4)</sup> getan hat, um die Analogie dieses Prozesses mit dem Carnotschen Kreisprozesse deutlicher hervorzuheben und um namentlich vom *physikalisch-chemischen* Gesichtspunkt den Charakter des Vakuums bez. der Energie als einer besonders einfachen „Substanz“ mit einer bestimmten Zustandsgleichung zu betonen.

1) Daß es in der Tat Fälle gibt, in denen trotz Konstanz von  $M, V, U$  äußere Änderungen eintreten, soll später (p. 462) an einem Beispiel aus der Elektrostatik gezeigt werden.

2) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1899. p. 473.

3) I. c. p. 471 Gleichung (58).

4) W. Wien, Wied. Ann. 52. p. 160.

Die Ausdehnung dieser Temperaturdefinition auf materielle Körper und die Anwendung dieser Form des Carnotschen Kreisprozesses auf sie kann dann durch eine einfache Erfahrung über das Gleichgewicht zwischen dem strahlungserfüllten Raum und der Materie gewonnen werden.

a) Der Carnotsche Prozeß mit dem Vakuum als Arbeitssubstanz.

Wir wollen einen Carnotschen Prozeß vornehmen, bei dem die Arbeitssubstanz sowie die beiden Wärmereservoir strahlungserfüllte Vakua sind. In einem von stationärer Strahlung erfüllten Raum herrscht in jeder beliebigen Richtung ein Druck auf die Flächeneinheit der Wand im Betrage von einem Drittel der Energiedichte der Strahlung, welches auch die Orientierung der betreffenden Wandfläche sei. Ist  $\pi$  der Druck,  $w$  die Energiedichte, so hat man  $\pi = \frac{1}{3}w$ . Dieser Druck wird also auf die Wände des Raumes ausgeübt, welche diese „Substanz“ undurchdringlich gegen ihre Umgebung abschließen. Eine materielle Substanz kann man erfahrungsgemäß durch gewisse Hülle vollständig von ihrer Umgebung isolieren. Bezuglich der Strahlung kann das mit Hilfe absoluter Spiegel geschehen. Daß es Körper gibt, welche alle aus dem Vakuum auf sie fallende strahlende Energie reflektieren, ist eine das Gleichgewicht zwischen dem Vakuum und den Körpern betreffende Erfahrungstatsache. Daß die Hülle aus solchen Körpern besteht, genügt aber noch nicht, um das eingeschlossene Vakuum gegen Änderungen seiner Energiedichte vollständig zu schützen.<sup>1)</sup> Die Hülle selbst könnte Strahlung emittieren und dadurch die Energiedichte der Vakuums vermehren. Nun läßt sich freilich aus dem zweiten Hauptsatz herleiten, daß für vollkommen spiegelnde Flächen das Emissionsvermögen gleich

1) Hr. Professor Nernst hatte die Güte mich darauf aufmerksam zu machen, daß es nötig ist, um eine Verunreinigung des strahlungserfüllten Raumes mit der Materie der einhüllenden Substanz zu vermeiden, die Hülle in einem Zustande anzunehmen, in welchem ihr Dampfdruck verschwindet. Das kann geschehen, indem man sich die spiegelnde Hülle hinreichend stark abgekühlt denkt; denn es ist eine das Gleichgewicht zwischen dem Vakuum und den Körpern betreffende Erfahrungstatsache, daß bei fortschreitender Abkühlung der Dampfdruck aller Substanzen sich dem Werte Null unbegrenzt nähert.

Null ist<sup>1)</sup>; aber wir dürfen von dieser Ableitung hier keinen Gebrauch machen, weil dabei der zweite Hauptsatz in der Form der Irreversibilität der Wärmeleitung angewandt wird. Wir können uns aber von irgend einer Annahme über die Größe des Emissionsvermögens dadurch freimachen, daß wir die Hülle als unendlich dünn annehmen. Dann kann sie keine endliche Energiemenge emittieren und dadurch die Energiedichte des eingeschlossenen Vakuums um einen endlichen Betrag ändern. Das gilt, sofern sie nicht von anderswoher Energiezufuhr empfängt. Auf der anderen Seite der spiegelnden Hülle befindet sich bei dem nachher auszuführenden Prozeß ein zweites strahlungserfülltes Vakuum von anderer Energiedichte. Aus diesem könnte nun allerdings Energie in die Hülle eintreten und durch Emission weiter in das innere Vakuum dringen. Aber hiergegen kann man sich leicht dadurch schützen, daß die unendlich dünne Hülle auch auf der Außenseite vollkommen spiegelnd angenommen wird. Ist die Hülle aus einheitlichem Material, so wird die vollkommene Reflexion an der Innenfläche eine ebensolche an der Außenfläche eo ipso bedingen. Ein Vakuum mit einer bestimmten Energiedichte kann also mit Hilfe einer doppelt spiegelnden Hülle in ein anderes von beliebiger Energiedichte eingesetzt werden, ohne daß sich eine Ausgleichung zwischen den Energiedichten vollzieht. Hinzuweisen ist auf eine Eigentümlichkeit, die die abgeschlossene Strahlung im Gegensatz zu einer abgeschlossenen materiellen Substanz hat. Ist eine Hülle für eine materielle Substanz undurchlässig, so wird, wenn diese Hülle aus einem Zylinder mit beweglichem Stempel besteht, beim Bewegen des Stempels sich zwar die Dichte der Substanz ändern, aber die Gesamtmenge wird unverändert bleiben. Denn die Abgeschlossenheit der Substanz ist keineswegs daran gebunden, ob der Stempel bewegt wird oder nicht. Setzt sich dagegen die spiegelnde Hülle, die eine Strahlung abschließt, aus einem Zylinder und einem beweglichen Stempel zusammen, so wird beim Herausziehen desselben die Energiedichte sich nicht nur entsprechend der Volumvermehrung verkleinern, sondern es wird infolge der durch den Strahlungsdruck ge-

---

1) Vgl. z. B. P. Drude, Lehrb. d. Optik. Leipzig 1900. p. 458.

leisteten Arbeit im ganzen etwas von der „Substanz“ Energie aus dem Raum verschwinden. Hier zeigt sich, daß wir es eigentlich doch nur mit einer Analogie zu tun haben.

Sei (Fig. 1)  $R$  das durch Doppelspiegel abgeschlossene Arbeitsvakuum entsprechend der arbeitenden Substanz des gewöhnlichen Carnotschen Prozesses, welches in ein größeres Vakuum  $W_1$  von der Energiedichte  $w_1$  eingesetzt ist. Dieses Vakuum stellt das erste Wärmereservoir des Carnotschen Prozesses vor, während sich, durch eine doppelt spiegelnde Wand dagegen abgeschlossen, aber durch einen Schieber  $K_1$  damit kommunizierend ein zweites Vakuum  $W_2$  mit der Energiedichte  $w_2$ <sup>1)</sup> daneben befindet. Dieses sei das zweite Reservoir des Carnotschen Prozesses. In der Wand von  $R$  befindet sich ein durch einen zweiten Schieber verschließbares Loch  $K_2$ . Wird dasselbe geöffnet, so wird sich die Strahlungsdichte  $w$  in  $R$  mit derjenigen  $w_1$  in  $W_1$  in der Art ausgleichen, daß, wenn das Volumen von  $W_1$  hinreichend groß ist,  $w$  merklich den Wert  $w_1$  annimmt. Sei der Raum  $R$  durch einen Stempel  $S$  abgeschlossen, welcher gestattet das Volumen sowohl bei offenem wie geschlossenem Schieber  $K_2$  zu verändern. Der Prozeß bei geschlossenem Schieber entspricht dem adiabatischen Teile des Carnotschen Prozesses, derjenige bei offenem dem isothermen. Sollen unendlich langsame Verschiebungen des Stempels stattfinden, so müssen wir dafür sorgen, daß wir  $S$  stets mit einem willkürlichen, von dem inneren Druck des Arbeitsvakums  $R$  unendlich wenig verschiedenen Drucke belasten können. Wir denken uns deshalb über  $S$  eine willkürlich durch einen Mechanismus zu regulierende Feder angebracht, die durch die expandierende Strahlung zusammengepreßt wird. Eine Feder eignet sich hier besser als ein Gewicht, weil wir dann jede Beziehung auf eine außerhalb der Vakuums befindliche gravitierende Masse vermeiden können. Der Raum oberhalb  $S$

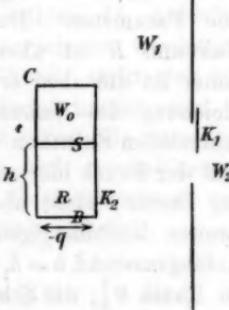


Fig. 1.

1)  $w_2$  bleibt noch frei verfügbar, und es soll erst später (vgl. p. 450) in geeigneter Weise darüber verfügt werden.

darf nun nicht, wie bei dem gewöhnlichen Carnotschen Prozeß meist stillschweigend angenommen wird, einfach ein Teil des umgebenden Mediums sein; dieses übt ja selbst einen wesentlichen Strahlungsdruck aus. Er muß vielmehr von einem strahlunglosen Vakuum gebildet werden. Ein solches kann existieren, wenn es sowohl gegen den Außenraum  $W_1$  wie gegen den Raum  $R$  durch beiderseitig spiegelnde Flächen abgeschlossen ist. Sei  $W_0$  dieses strahlunglose Vakuum; die Räume  $R$ ,  $W_0$  bilden einen gemeinsamen zylindrischen Raum  $C$ , welcher in seiner Gesamtheit durch spiegelnde Flächen gegen die Umgebung abgeschlossen ist. Der Querschnitt des Zylinders sei  $q = 1$ ; der Stempel  $S$  befindet sich in der veränderlichen Höhe  $h$  oberhalb der Basis  $B$  des Zylinders.

Um den Kreisprozeß rechenmäßig durchzuführen, brauchen wir die „Zustandsgleichung“ der Arbeitssubstanz, d. h. den Druck derselben ausgedrückt durch die denselben bestimmenden Parameter. Der Druck auf die Grenzfläche unseres Vakuums  $R$  ist aber nur durch die Dichte bestimmt, und daher ist die oben erwähnte Beziehung  $\pi = \frac{1}{2} w$  die Zustandsgleichung des Vakuums. Von der Zustandsgleichung einer materiellen Substanz unterscheidet sie sich vor allem dadurch, daß der Druck hier nur eine Funktion einer einzigen Variablen, der Dichte, nicht aber neben dieser noch eine solche einer zweiten unabhängigen Größe, der Temperatur, ist. Sei im Anfangszustand  $h = h_1$ ,  $w = w_1$  und befindet sich der Zylinder  $C$  im Raum  $W_1$ ; die Schieber seien geschlossen. Das Vakuum  $R$  werde nun erstens adiabatisch bei geschlossener Klappe  $K_2$  unendlich langsam komprimiert, bis die Höhe  $h$  auf  $h_2 = h_1 - dh_1 < h_1$  vermindert worden und dadurch die Energiedichte auf  $w_2 = w_1 + dw > w_1$  gestiegen ist. Hierauf bringe man den Zylinder reversibel und unendlich langsam durch  $K_1$  in den Raum  $W_2$ ; dabei wird in Summa von außen gegen den größeren Strahlungsdruck in  $W_2$  Arbeit geleistet werden müssen, die beim Rücktransport des Zylinders zurückgewonnen wird. Nun läßt man das in  $W_2$  befindliche Vakuum  $R$  sich wieder ausdehnen, aber isotherm, indem man den Schieber  $K_2$  öffnet ( $K_1$  ist natürlich geschlossen, wie immer wenn nicht der Zylinder durch die Wand hindurchgeführt wird). Die Höhe möge dabei auf  $h_3' = h_2 + \Delta h_3$  zunehmen; die Energiedichte

bleibt konstant  $w_3$ .  $K_3$  werde wieder geschlossen und  $R$  weiter ausgedehnt, und zwar diesmal adiabatisch, bis die Energie-dichte wieder auf  $w_1$  abgenommen hat. Dann habe die Höhe  $h$  bis auf  $h_1' = h_2 + dh_3$  zugenommen. Weiter werde der Zylinder  $C$  in den Raum  $W_1$  zurückgeschafft, wobei die bei dem vorigen Transport von außen aufgenommene Arbeit wieder nach außen abgegeben wird. Hier werde  $K_3$  wieder geöffnet und die Höhe  $h_1'$  durch isotherme Kompression wieder auf ihren ursprünglichen Wert  $h_1$  zurückgebracht. Wird dann  $K_3$  geschlossen, so ist das Arbeitsvakuum wieder in seinem alten, durch die Werte  $h_1$  und  $w_1$  charakterisierten Zustand. Daß sich der Endzustand nicht noch in anderer Weise, etwa durch Verteilung der Energie auf verschiedene Farben, vom Anfangszustand unterscheidet, folgt daraus, daß es, auch rein elektromagnetisch betrachtet, bei gegebener Strahlungsdichte nur einen stationären Zustand gibt, der sich im Laufe der Zeit schließlich von selbst herstellt. Wir wählen  $dh_1$  unendlich klein,  $\Delta h_2$  aber endlich, weil das die Ausrechnung vereinfacht. Die während des Prozesses geleistete Arbeit stellt sich zum Schlusse als unendlich klein erster Ordnung heraus, und wir können daher bei ihrer Auswertung alle Größen, die wenigstens von der zweiten Ordnung unendlich klein sind, vernachlässigen.

Wir berechnen die während des Gesamtprozesses nach außen, d. h. an die Feder in  $W_0$  abgegebene Arbeit:

$$A = \int_{h_1, w_1}^{h_2, w_2} \pi d(qh) + \int_{h_2, w_2}^{h_1', w_1} \pi d(qh) + \int_{h_1', w_1}^{h_1, w_1} \pi d(qh).$$

Sind  $\pi_1$  und  $\pi_2$  die den Energiedichten  $w_1$  und  $w_2$  entsprechenden Druckwerte und berücksichtigt man, daß  $q = 1$ , so hat man:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\pi_1 + \pi_2}{2} dh_1 + \pi_2 \Delta h_2 + \frac{\pi_1 + \pi_2}{2} dh_3 - \pi_1 (\Delta h_2 + dh_3 - dh_1) \\ &= \frac{1}{3} \left[ -\frac{w_1 + w_2}{2} dh_1 + w_2 \Delta h_2 + \frac{w_1 + w_2}{2} dh_3 \right. \\ &\quad \left. - w_1 (\Delta h_2 + dh_3 - dh_1) \right]. \\ \frac{w_1 + w_2}{2} &= w_1 + \frac{1}{2} dw. \end{aligned}$$

Nun ist beim adiabatischen Prozeß<sup>1)</sup>

$$dw = \frac{dh_1}{h_1} - \frac{4}{3} w_1;$$

1) P. Drude, Lehrbuch d. Optik, Leipzig 1900. p. 475.

also

$$\frac{w_1 + w_2}{2} = w_1 \left( 1 + \frac{d h_1 - \frac{2}{3}}{h_1} \right),$$

$$w_2 = w_1 + d w = w_1 \left( 1 + \frac{d h_1 - \frac{4}{3}}{h_1} \right).$$

$d h_1$  und  $\Delta h_2$  sind willkürlich wählbar.  $d h_3$  ist durch die Angabe bestimmt, daß diese am Volumen  $h_2' = h_1 - d h_1 + \Delta h_2$  vorgenommene Volumvergrößerung die Energiedichte des Wertes  $w_1 + d w$  auf den Wert  $w_1$  zurückführen soll. Es muß also sein:

$$d w = \frac{d h_3}{h_1 - d h_1 + \Delta h_2} \cdot \frac{4}{3} (w_1 + d w);$$

$$d h_3 = \frac{3}{4} d w \cdot \frac{h_1 - d h_1 + \Delta h_2}{w_1 + d w}$$

$$= \frac{3}{4} \frac{d w}{w_1} (h_1 - d h_1 + \Delta h_2) \left( 1 - \frac{d w}{w_1} \right) = \frac{3}{4} \frac{d w}{w_1} (h_1 + \Delta h_2)$$

$$= d h_1 + \frac{3}{4} \frac{d w}{w_1} \Delta h_2.$$

$$\Delta = \frac{1}{3} \left[ -w_1 \left( 1 + \frac{d h_1 - \frac{2}{3}}{h_1} \right) \left( d h_1 - d h_1 - \frac{3}{4} \frac{d w}{w_1} \Delta h_2 \right) \right.$$

$$+ w_1 \left( 1 + \frac{d h_1 - \frac{4}{3}}{h_1} \right) \Delta h_2$$

$$- w_1 \left( \Delta h_2 + d h_1 + \frac{3}{4} \frac{d w}{w_1} \Delta h_2 - d h_1 \right) \left] \right]$$

$$= \frac{4}{9} \frac{w_1}{h_1} \cdot d h_1 \Delta h_2. \text{1)}$$

1) Man kann hieraus leicht mit Hilfe der gewöhnlichen Thermodynamik das Stefan-Boltzmannsche Gesetz herleiten. Die zunächst unbekannten Temperaturen der beiden Reservoirs müssen sich nämlich so zueinander verhalten, daß die bei Gelegenheit des reversiblen Überganges von Energie von einem Reservoir zu anderen gewonnene Arbeit ihren Betrage nach dem Carnotschen Prinzip entspricht.

Nun ist  $\Delta = (T_2 - T_1/T_1) Q_1$ , wobei  $T_1$  und  $T_2$  die Temperaturen der Reservoirs bedeuten,  $Q_1$  die vom Reservoir geringerer Energiedichte aufgenommene Energie. Ist  $Q_2$  die vom Reservoir höherer Energiedichte abgegebene Energie, so hat man  $Q_2 = \Delta + Q_1$  und  $\Delta = (T_2 - T_1/T_2) Q_2$ .  $Q_2$  ist ausschließlich die während des zweiten Teilprozesses dem Reservoir (Index 2) entzogene Energie; während desselben wird der Betrag  $w_2 \cdot \Delta h_2$  vom Arbeitsvakuum als Strahlung aufgenommen,  $\frac{1}{3} w_2 \Delta h_2$  zur Arbeitsleistung gebraucht; im ganzen ist also der Energiebetrag  $\frac{4}{3} w_2 \Delta h_2$  dem Reservoir entnommen worden. Für  $\Delta$  ist der oben entwickelte Ausdruck einzusetzen. Man erhält:

$$\frac{4}{3} \frac{w_1}{h_1} d h_1 \cdot \Delta h_2 = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \cdot \frac{4}{3} w_2 \Delta h_2,$$

Der Ausdruck ist wesentlich positiv. Bei dem Prozeß ist also aus dem Reservoir von höherer Energiedichte oder, wie wir nach der Planckschen elektromagnetischen Definition auch sagen können, Temperatur eine gewisse Menge strahlende Energie aufgenommen und in Arbeit verwandelt worden, während gleichzeitig eine gewisse Energiemenge auf das Vakuum von der geringeren Energiedichte bez. Temperatur übergegangen ist. Wir müssen den Temperaturbegriff auch auf die Materie übertragen. Bringen wir ein strahlungserfülltes Vakuum in eine nicht vollkommen spiegelnde Hülle, so wird seine Energiedichte sich dabei im allgemeinen nicht mehr unverändert erhalten können. Aber es ergibt sich erfahrungsgemäß, daß, wenn die Hülle irgend ein im Gleichgewicht befindliches chemisches System darstellt, sich mit der Zeit eine gewisse, auf die Dauer beständige, von Null verschiedene Energiedichte im Vakuum herstellt.<sup>1)</sup> Dies ist eine Erfahrung, welche sich auf das Gleichgewicht zwischen dem Vakuum und der Materie bezieht; solche Beziehungen einzuführen hatten wir uns vorbehalten. Hat sich

woraus  $\frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{h_1} \frac{w_1}{w_2} dh_1$ .

Nun ist (vgl. oben p. 451)

$$\frac{dh_1}{h_1} = \frac{3}{4} \frac{dw}{w_1},$$

also

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{4} \frac{dw}{w_2} = \frac{w_2 - \frac{1}{4} dw}{w_2}$$

oder

$$\frac{T_1^4}{T_2^4} = \frac{w_2^4 - w_2^3 dw}{w_2^4} = \frac{w_2 - dw}{w_2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Das ist das Stefan-Boltzmannsche Gesetz. Es ist zu bemerken, daß vom Standpunkte der Strahlungstheorie es eigentlich einfacher wäre, das Verhältnis der absoluten Temperaturen durch dasjenige der Energiedichten selbst, nicht ihren vierten Wurzeln zu definieren. Das Carnot'sche Prinzip sowie das Gasgesetz würden dann eine etwas andere Form wie gewöhnlich erhalten. Die Bevorzugung des Gasgesetzes von dem Stefan-Boltzmannschen bei der Definition der Temperatur ist im Grunde wohl als eine historische Zufälligkeit anzusehen, die durch die Reihenfolge der Auffindung beider Gesetze bedingt ist.

1) Dies wird in neuerer Zeit z. B. von Jeans bestritten; doch mag auf dessen Anschauungen, die zu so merkwürdigen Konsequenzen führen, hier zunächst keine Rücksicht genommen werden.

nun ein solches Strahlungsgleichgewicht zwischen dem Vakuum und einem nicht absolut spiegelnden Körper hergestellt oder wählen wir zur Begrenzung des Vakuums von vorne herein materielle Körper, die so beschaffen sind, daß gerade keine Änderung in der Energiedichte des Vakuums eintritt, so wollen wir sagen, der betreffende materielle Körper habe die Temperatur des Vakuums. Das ist zunächst eine reine Definition. Aus ihr aber folgt im Verein mit dem eben betrachteten Kreisprozeß, daß es möglich ist, Arbeit zu gewinnen, wenn Wärme von einem Körper so definierter höherer Temperatur auf einen solchen niederer Temperatur übergeht. Denken wir uns den Kreisprozeß noch einmal durchgeführt; wir wollen aber diesmal, statt die Halbräume  $W_1$  und  $W_2$  (Fig. 1) ins Unendliche auszudehnen, sie vielmehr bis auf einen kleinen Teil in unmittelbarer Nähe der Trennungswand mit je einer homogenen materiellen Substanz angefüllt denken. Jede dieser Substanzen habe die Temperatur des Vakuums, an das sie grenzt. Dann werden diese beiden Substanzen während des Kreisprozesses in den Räumen  $W_1$  und  $W_2$  dauernd die Energiedichte  $w_1$  und  $w_2$  durch Wärmeaufnahme oder Abgabe aufrecht erhalten. Die geleistete Arbeit wird dieselbe wie vorher sein. Nur wird die dieser Arbeit entsprechende Energie jetzt aus dem Wärmeverrat eines materiellen Körpers stammen, und der mit der Arbeitsleistung notwendig verbundene Prozeß wird ein Übergang von Wärme von einem materiellen Körper zu einem anderen sein. Da der an das Vakuum mit der größeren Energiedichte grenzende Körper laut Definition die höhere Temperatur hat, so ist Wärme von dem höher temperierten zum niedriger temperierten Körper übergegangen. Ein höher temperierter Körper ist für uns ein solcher, welcher, ohne spiegelnd zu sein, mit einem Vakuum von höherer Energiedichte im Gleichgewicht sein kann. Wenn wir die Temperatur  $T$  eines Körpers bei konstantem  $M$ ,  $V$ ,  $U$  verändern können, so heißt das daher, daß wir ihn so verändern können, daß er nunmehr mit einem Vakuum einer anderen Energiedichte wie vorher im Gleichgewicht sich befindet; und zwar entspricht einer Vergrößerung von  $T$  eine Vergrößerung der Energiedichte des angrenzenden Vakuums und umgekehrt einer Verkleinerung von  $T$  eine Verkleinerung derselben.

b) Kreisprozeß bei frei verfügbarer Temperatur im  
Widerspruch zum zweiten Hauptsatz.

Wir können jetzt einen Prozeß angeben, der zu einem Widerspruch gegen den zweiten Hauptsatz in seiner ursprünglichen Form führt, sofern es möglich ist, die Temperatur, ohne daß äußere Änderungen vor sich gehen, bei konstantem  $M$ ,  $V$ ,  $U$  willkürlich zu verändern.

1. Durchführung des Kreisprozesses.

Unsere Substanz ( $H$  Fig. 2) mit den Werten  $M$ ,  $V$ ,  $U$ ,  $T$  sei in eine parallelepipedische Hülle  $A$  eingeschlossen, die für Materie undurchlässig ist. Dieselbe umschließt, durch ein schmales Vakuum getrennt, eine zweite dünne, doppelt spiegelnde Hülle  $B$  mit einer durch einen Schieber  $L$  verschließbaren

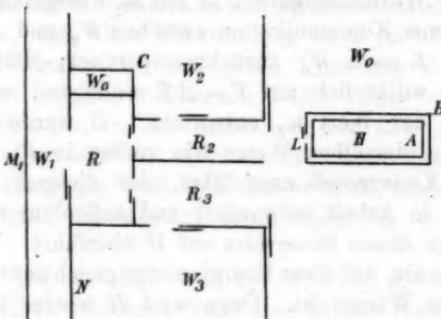


Fig. 2.

Öffnung. Das Gefäß, das einem Dewarschen nachgebildet ist, befindet sich in einem absolut strahlungsfreien Vakuum  $W_0$ . An dasselbe grenzen, durch eine doppelt spiegelnde Wand getrennt, zwei Vakua  $W_2$  und  $W_3$  mit den Energiedichten  $w_2$  und  $w_3$ . Von denselben durch verschließbare Löcher getrennt sind die Räume  $R_2$  und  $R_3$ , in welche  $H$  von  $W_0$  aus so eingeschoben werden kann, daß ein beliebig kleiner Teil von  $R_2$  bez.  $R_3$  freibleibt.  $R_2$  und  $R_3$  kommunizieren weiter durch Schieber mit dem Teile  $R$  des Zylinders  $C$ , der so eingerichtet ist wie in Fig. 1.  $R$  kommuniziert andererseits durch einen Schieber mit dem Raume  $W_1$  der Dichte  $w_1$ , der in der Nähe der Wand  $N$  leer von Substanz ist, im übrigen aber

durch eine im Gleichgewicht befindliche materielle Substanz  $M_1$  eingenommen wird.  $H$  habe anfangs die Temperatur  $T$  des Raumes  $W_1$ . Seine Temperatur werde, während er sich im Vakuum befindet, bei konstantem  $M$ ,  $V$ ,  $U$  willkürlich auf  $T + \Delta T$  erhöht, wobei diese Temperatur der Energiedichte  $w_2$  entspricht. Daß das ohne äußere Veränderungen möglich ist, ist später nachzuweisen. Dann werde  $H$  reversibel bei geschlossenem  $L$ , aber offener Kommunikation zwischen  $R_2$  und  $W_2$  in  $R_2$  eingeführt, so daß nur ein sehr kleiner Teil des Raumes  $R_2$  leer von Materie bleibt.  $L$  werde wieder geöffnet, die Kommunikation zwischen  $R_2$  und  $W_2$  unterbrochen und der vorhin beschriebene Kreisprozeß mit dem Vakuum  $R$  als Arbeitssubstanz ausgeführt. Dabei wird eine gewisse Wärmemenge des Körpers  $H$  in Arbeit verwandelt und außerdem eine gewisse Wärmemenge von  $H$  auf  $M_1$  übergeführt.  $H$  wird nun bei offener Kommunikation zwischen  $W_2$  und  $R_2$  und Abschluß von  $L$  nach  $W_0$  zurücktransportiert; dort wird die Temperatur willkürlich auf  $T - \Delta T$  erniedrigt, wobei dieser Temperatur der Wert  $w_3$  entspricht.  $H$  werde nun in  $R_2$  eingeführt in derselben Weise wie vorher in  $R_2$ . Nun wird wieder ein Kreisprozeß ausgeführt, der diesmal Wärme des Körpers  $M_1$  in Arbeit verwandelt und außerdem eine gewisse Wärmemenge dieses Reservoirs auf  $H$  überführt. Wir richten den Prozeß so ein, daß diese Energiemenge gleich der vorhin von  $H$  entnommenen Wärme ist. Dann wird  $H$  wieder ins Vakuum zurückgeschafft und dort die Temperatur  $T$  wieder hergestellt. Der Endeffekt des Prozesses ist nun einfach der, daß sich Energie des Körpers  $M_1$  ohne weitere Vorgänge in Arbeit verwandelt. Das kommt aber auf die Umkehrung eines Prozesses hinaus, der in der Grundform des zweiten Hauptsatzes als irreversibel bezeichnet wird. Denken wir uns nämlich als Körper  $M_1$  eine Flüssigkeit, in welcher sich ein Schaufelrad unter Reibung bewegen kann und setzen wir dieses durch Gewichte in Bewegung, so wird dabei deren Gravitationsenergie durch Reibung in Wärme des Körpers  $M_1$  verwandelt. Dieser Prozeß soll nun unumkehrbar sein; wir können ihn aber mit Hilfe des angegebenen Verfahrens umkehren, indem wir nämlich die aus Wärme von  $M_1$  gewonnene Arbeit in Gravitationsenergie verwandeln. So führt die Annahme, wir dürfen frei über die

Temperatur verfügen, zu einem Widerspruch gegen den zweiten Hauptsatz in seiner ursprünglichen Form. Es muß daher eine Beziehung von der Form existieren

$$(1) \quad T = f_1(M, U, V).$$

## 2. Nachträgliche Untersuchung der Durchführbarkeit eines Teiles des Kreisprozesses.

Es ist nun zu zeigen, daß die vorgenommene Umwandlung des Systems von einer Temperatur zu einer anderen bei Konstanz von  $M, V, U$  auch ohne äußere Änderungen ausführbar ist. Zuerst soll dabei nachgewiesen werden, daß es, äußere Änderungen vorbehalten, immer möglich sein muß, das System aus einem durch  $T_1$  charakterisierten Zustand in einen anderen durch  $T_2$  charakterisierten umzuwandeln. Zweitens ist darzutun, daß diese Umwandlung auch im absolut strahlungsfreien Vakuum vor sich gehen kann und drittens, daß sie in diesem besonders einfachen Falle sicher ohne irgendwelche Änderungen in der Außenwelt vor sich geht. Dann wissen wir alles, was wir zu wissen brauchen; denn wir haben die Umwandlung ja, weil sich dieser Fall besonders leicht übersehen läßt, im absolut strahlungsfreien Vakuum vorgenommen.

Beide Systeme  $(M, V, U, T_1; M, V, U, T_2)$  stellen Zustände derselben Substanz dar. Sie können sich also nicht durch ihre elementare Zusammensetzung unterscheiden. Nun gibt es immer irgendwelche Prozesse, durch welche ein System in seine chemischen Elemente zerlegt werden kann; das ist die Quintessenz aller Erfahrungen der analytischen Chemie. Umgekehrt kann es auch stets aus seinen Elementen wieder aufgebaut werden; das ist der Ausdruck des Erfahrungsinhaltes der synthetischen Chemie. Wenn diese Aufgabe auch in manchen Fällen noch nicht gelöst ist, so sind wir doch auf Grund zahlloser Erfahrungen von ihrer prinzipiellen Lösbarkeit allgemein überzeugt. Zwei Systeme, welche Zustände derselben Substanz darstellen, müssen also jedenfalls stets durch irgendwelche Operationen ineinander übergeführt werden können. Soll nämlich ein erstes System in ein zweites übergeführt werden, so brauchen wir jenes nur in

seine Elemente zu zerlegen und aus diesen, die ja nach Art, Zahl und Menge mit denen des zweiten identisch sind, das zweite System wieder aufzubauen. Dabei wird in Summa in der Außenwelt keine Änderung in der Art und Menge der Materie verbleiben, wenn auch vielleicht bei gewissen Zwischenreaktionen (zum Zwecke der Katalyse etc.) Materie von außen herangezogen werden muß. Schließlich wird doch das zweite System allein aus den Elementen des ersten aufgebaut.

a) Nachweis, daß der Teilprozeß im strahlungsfreien Vakuum vor sich gehen kann.

Wir müssen uns nun überzeugen, daß unser Prozeß im Vakuum auch vor sich gehen kann. Denken wir uns irgend eine Substanz, gegen Leitung und Strahlung geschützt, mit gegebener Masse, Energie und Volumen, in ein absolut strahlungsfreies Vakuum eingeschlossen und sei diese Substanz unter diesen Umständen verschiedener, durch verschiedene Werte der Temperatur charakterisierter Zustände fähig. Nehmen wir an, der Übergang des einen Zustandes in den anderen, wenn er sich ohne Änderungen in der Umgebung vollziehen könnte, wäre irreversibel; dabei ist noch möglich, daß irreversibel entweder der Übergang des ersten Zustandes in den zweiten oder umgekehrt des zweiten in den ersten sei. Bei einem irreversiblen Prozeß aber wird es eine gewisse, für das System charakteristische Größe, die Entropie, geben, die dauernd zunimmt.<sup>1)</sup> Das folgt einfach aus dem Begriff der Irreversibilität. Hieraus ergibt sich zunächst, daß ein Prozeß ohne äußere Änderungen nicht eintreten kann, bei dem die Entropie abnehmen würde. So erhält man als hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes bei Ausschluß äußerer Änderungen, daß die Entropie ein Maximum sei. Notwendig ist diese Bedingung offenbar zunächst nicht; es könnte sehr wohl von einem Zustand aus eine Änderung nicht erfolgen, obgleich mit dieser virtuellen Verschiebung eine Vermehrung der Entropie verbunden sein würde; denn es wird ja zunächst nur gesagt, daß die Entropie nicht abnehmen dürfe. In der

---

1) Vgl. M. Planck, Vorlesungen p. 83.

Tat ist die hinreichende thermodynamische Bedingung des Gleichgewichtes erfahrungsgemäß nicht immer eine notwendige. Es tritt unter Umständen auch Gleichgewicht ein, ohne daß die thermodynamische Bedingung (Maximum der Entropie) erfüllt wäre. Tatsächlich aber läßt wenigstens die klassische Thermodynamik derartige Fälle als Ausnahmen beiseite und macht bei der Anwendung ihre Gesetze auf spezielle Gleichgewichtszustände<sup>1)</sup> die Annahme, daß im Gleichgewicht die Entropie immer ein Maximum sei.<sup>2)</sup> Diese Annahme wollen auch wir machen. Es ist zu bemerken, daß wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, wenn also wirklich Gleichgewicht im strengen Sinne (nicht sehr langsam veränderliche Zustände) existieren sollten, die durch ein Maximum der Entropie nicht gesichert sind, unser Satz von der Bestimmtheit des Druckes durch Temperatur, Masse und Volumen nicht beweisbar, aber tatsächlich auch nicht immer richtig wäre. Würden die scheinbaren Gleichgewichte zwischen Wasserstoff, Sauerstoff und Wasserdampf bei gewöhnlicher Temperatur wirkliche Gleichgewichte vorstellen, so wäre in der Tat der Druck durch Masse, Temperatur und Volumen nicht bestimmt, sondern könnte je nach dem jeweiligen Verhältnis der drei Stoffe noch eine unendliche Menge von Werten erhalten. Wenn wir aber annehmen, daß Gleichgewicht nur eintritt, wenn die Entropie ein Maximum ist, so wird ein irreversibler Prozeß, während dessen die Entropie dauernd zunimmt, auch wirklich eintreten müssen.

Dabei müssen wir uns allerdings noch besonders überzeugen, daß, wenn er eintritt, nicht etwa gleichzeitig äußere Veränderungen stattfinden; denn unsere ganzen Betrachtungen ruhen auf der Voraussetzung, daß wir ein absolut abgeschlossenes System haben, weil nur in diesem Falle allein dessen Entropieänderung maßgebend ist. Die Notwendigkeit sich hiervon zu überzeugen, besteht übrigens schon aus einem anderen oben angegebenen Grunde. Wir werden uns nachher von der Abgeschlossenheit des Systems in diesem Sinne Rechenschaft geben und setzen sie zunächst voraus.

1) M. Planck, l. c. p. 117 ff.

2) M. Planck, l. c. p. 114.

Entspräche demnach dem Übergang von  $T_1$  zu  $T_2$ , der im System möglicherweise von molekularen Umwandlungen begleitet sein könnte, eine fortschreitende Vermehrung der Entropie, so würde also *dieser* Prozeß tatsächlich vor sich gehen. Entspräche umgekehrt der Übergang von  $T_1$  zu  $T_2$  einer fortschreitenden Verminderung der Entropie, so würde zwar dieser Übergang nicht freiwillig eintreten, wohl aber der entgegengesetzte. Nun sollen aber  $T_1$  und  $T_2$  wie überhaupt alle Zwischenzustände Gleichgewichte vorstellen. Das ist aber nur möglich, wenn die Entropie für alle Werte von  $T$  konstant ist. Denn sonst müßte, wenn für irgend eine unendlich kleine Verschiebung von  $T$  nach  $T + dT$  eine Entropieverminderung eintreten sollte, für den umgekehrten Prozeß eine Entropievermehrung erscheinen, so daß der Wert  $T + dT$  kein stabiles System darstellen würde. Eine freiwillige Umwandlung von  $T_1$  in  $T_2$  oder umgekehrt wird dann freilich mit *endlicher* Geschwindigkeit nicht mehr eintreten. Aber es wird in der Thermodynamik angenommen, daß man einen aus lauter Gleichgewichtszuständen bestehenden Prozeß wenigstens unendlich langsam, dann aber auch in entgegengesetzter Richtung stets vornehmen kann.<sup>1)</sup> Man kann sich diese Möglichkeit in unserem Falle, der nicht so anschaulich ist wie der einer unendlich langsamen Kompression oder Dilatation, mit Hilfe einer Grenzbetrachtung plausibel machen.

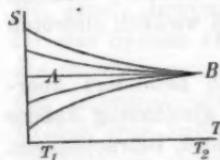


Fig. 3.

Wir tragen die Entropie  $S$  für das System mit den Werten  $M, V, U$  als Funktion von  $T$  auf (Fig. 3). Der tatsächliche Verlauf dieser Kurve zwischen  $T_1$  und  $T_2$  stellt dann eine Parallele zur Abszissenachse dar. Betrachten wir nun eine Funktion von  $T$ , die einen variablen Parameter enthält und die durch eine von  $B$  in der angedeuteten Weise auslaufende Kurvenschar repräsentiert wird. Diese Kurvenschar möge die Parallele zur Abszissenachse  $AB$  mitenthalten; der Differentialquotient der Funktion habe außer auf der Kurve  $AB$ , wo er dauernd gleich Null ist, für eine bestimmte Kurve stets ein

1) M. Planck, l. c. p. 49.

definotes, für die eine Hälfte der Schar positives, für die andere Hälfte negatives Vorzeichen. Die Kurven oberhalb der Geraden  $AB$  würden dann Prozessen entsprechen, die mit endlicher Geschwindigkeit von  $T_2$  nach  $T_1$  führen. Je mehr sie sich  $AB$  nähern, desto langsamer würde die Geschwindigkeit werden, um endlich für diese Linie selbst in einen unendlich langsamem Übergang von  $T_2$  in  $T_1$  auszuarten. Umgekehrt stellt als Grenzfall der unteren Kurven  $AB$  einen Prozeß dar, der sich mit unendlich langsamer Geschwindigkeit von  $T_1$  nach  $T_2$  vollzieht. Worin diese Variation des Parameters bestehen könnte, dafür fehlt uns freilich in unserem fiktiven Falle die Anschauung. Eine solche haben wir aber wohl im Falle einer adiabatischen Kompression oder Dilatation.

Denken wir uns die adiabatische Kompression eines Gases in der Weise vorgenommen, daß der Stempel durch eine Feder in Bewegung gesetzt wird, deren Druck um ein geringes stärker als der innere Druck des Gases ist. Der Gasbehälter samt der Feder befindet sich in einem Vakuum, das von einer zweiten, strahlungsundurchlässigen Hülle umschlossen sei; diese Hülle befindet sich wieder im Vakuum. Dann stellt der Gesamtinhalt des äußeren Gefäßes ein abgeschlossenes System vor, dessen Zustandsänderungen im Sinne der wachsenden Entropie verlaufen werden. Diese Änderung wird unter der gemachten Annahme eine Kompression des Gases sein, die mit endlicher Geschwindigkeit verläuft und die schon wegen der Reibung des Stempels an den Gefäßwänden eine Vermehrung der Entropie zur Folge hat. Der Verlauf der Entropie bei einer Kompression zwischen den Volumewerten  $v_1$  und  $v_2$  werde wie vorhin durch eine Kurve  $BC$  (Fig. 4) dargestellt. Machen wir umgekehrt den Druck der Feder etwas und zwar endlich schwächer

als den inneren Druck des Gases, so bewegt sich etwa der Stempel von  $v_2$  nach  $v_1$ , und diesem Prozeß entspricht dann wieder ein Ansteigen der Entropie, das durch die Kurve  $DB$  dargestellt werden möge. Denken wir uns den Prozeß immer wieder nach beiden Richtungen hin vollzogen mit Druckwerten der Feder, die sich immer weniger von dem jeweiligen

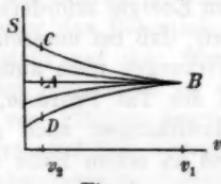


Fig. 4.

inneren Drucke des Gases unterscheiden, so erhalten wir Kurven, die sich immer mehr der Parallele zur Abszissenachse  $AB$  anschmiegen. Wir drücken das aus, indem wir sagen, der der geraden Linie entsprechende, aus lauter Gleichgewichtszuständen bestehende Prozeß sei nach beiden Richtungen möglich und könne, wenn auch mit unendlich langsamer Geschwindigkeit, tatsächlich vollzogen werden.<sup>1)</sup> Der variable Parameter, der die einzelnen Kurven der Schar voneinander unterscheidet, von dem wir in diesem Falle eine anschauliche Vorstellung haben, ist die Differenz zwischen dem Federdrucke und dem inneren Drucke des Gases.

Somit ist nunmehr bewiesen, daß, wenn  $T$  nach Festlegung von  $M, V, U$  noch verfügbar bleibt, es möglich ist, einen Prozeß vorzunehmen, der die Temperatur von einem beliebigen Werte zu einem beliebigen anderen in beliebiger Richtung überführt. Wir haben uns nun noch zu überzeugen, daß dieser Prozeß keine Änderungen in der Umgebung veranlassen kann, und wir werden das wegen der besonders einfachen Eigenschaften des Vakuums können, wenn diese Umgebung ein absolut strahlungsfreies Vakuum ist. Ein solches aber hatten wir als Umgebung bei der Umwandlung zugrunde gelegt.

Man könnte nun vielleicht glauben, daß bei diesem Prozeß, bei welchem Volumen, Energie und Masse sowie deren elementare Zusammensetzung konstant bleiben, überhaupt keine Einwirkung nach außen möglich ist, weil diese etwa stets einen Übergang von Energie erfordern dürfte; dann wäre der besondere Nachweis, daß bei unserem speziellen Prozeß im absoluten Vakuum Wirkungen nach außen ausbleiben, überflüssig. Aber es gibt in der Tat Prozesse, wo trotz der Konstanz dieser Größen Einwirkungen nach außen vorhanden sind. Man kann sich dies an einem Falle aus der Elektrostatik klar machen.

<sup>1)</sup> Prozesse können trotz Konstanz von Masse, Volumen und Energie äußere Wirkungen haben; Beispiel aus der Elektrostatik.

Eine Hohlkugel  $K$  aus dünnem Glase (Fig. 5) sei mit einem Dielektrikum, etwa Petroleum, angefüllt und werde in einen

---

1) M. Planck, l. c. p. 48.

unbegrenzten, mit demselben Medium gefüllten Raum eingesetzt. Im Innern derselben befinden sich vier kleine elektrisch geladene Kugelchen  $a, b, c, d$ , von denen zwei positiv mit der gleichen und zwei negativ ebenfalls mit der gleichen Elektrizitätsmenge  $e$  geladen seien. Diese Kugelchen seien so verteilt, daß je zwei entgegengesetzt geladene auf der einen und der anderen Seite einer Äquatorialebene  $L$  der Kugel sich befinden. Alle vier Kugelchen mögen auf demselben Durchmesser  $AB$  der Hohlkugel liegen, der als Polarachse der genannten Äquatorialebene zugeordnet ist. Die Anordnung sei symmetrisch zur Ebene  $L$ . Die Mitte der Verbindungsstrecke je zweier auf derselben Seite der Äquatorialebene gelegenen Kugelchen teile den entsprechenden Radius in zwei gleiche Teile. Die Äquatorialebene  $L$  werde durch eine ins Unbegrenzte ausgedehnte, metallisch leitende Lamelle gebildet, die die gläserne Hohlkugel in einem größten Kreise durchsetzt. Dann ist jeder

der beiden dadurch gebildeten unendlichen Halbräume gegen elektrostatische Wirkungen, die aus dem anderen Raumteile herrühren könnten, geschützt. Denn auf den unendlich fernen Punkten der leitenden Fläche herrscht wie überall im Unendlichen das Potential Null. Da nun weiter das Potential des gesamten Leiters konstant ist, so besteht auf ihm überall dieses selbe Potential. Jeder der beiden Halbräume ist also an allen Stellen, auch im Endlichen, von Flächen begrenzt, auf denen unter allen Umständen das Potential Null vorhanden ist. Daher kann sich nach dem Greenschen Satze die Potentialverteilung im Innern nur durch im Innern selbst eintretende Änderungen (Verschiebung von Ladungen etc.) modifizieren.

Wir betrachten den Raum innerhalb der Hohlkugel  $K$ , dessen Begrenzung im großen und ganzen von dieser und nur auf einer schmalen Zone längs des Kugeläquators von dem metallischen Leiter gebildet wird. In diesem System können wir jetzt eine Änderung vornehmen, bei welcher Volumen,

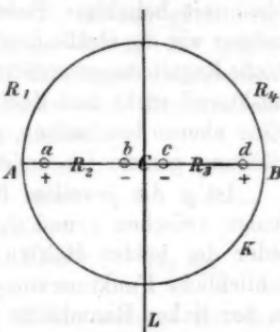


Fig. 5.

Masse und Energie dauernd konstant bleiben und welche doch Veränderungen im Außenraume zur Folge hat.  $a$  und  $b$  seien mit Hilfe eines vollständig in der betreffenden Halbkugel gelegenen Mechanismus beweglich, welcher gestattet sie auf dem Durchmesser  $AB$  zu verschieben, aber so, daß das Zentrum ihrer Verbindungsgeraden dabei festbleibt. Die Kraft, mit welcher diese Verschiebung stattfindet, möge eine beliebig vorzuschreibende Größe haben, derart, daß sie für sich allein sowohl eine Annäherung wie eine Entfernung der beiden Kugelchen mit beliebiger Beschleunigung bewirken kann. Weiter mögen wir die Größe dieser Kraft im Laufe der Zeit durch eine bloße Regulierungsvorrichtung beliebig variieren können, die nur auslösend wirkt und daher ohne Arbeitsleistung funktioniert.<sup>1)</sup> Eine ebenso beschaffene, aber von der ersten unabhängige Vorrichtung gstatte im anderen Raumteile  $c$  und  $d$  zu bewegen.

Ist  $g$  die jeweilige Entfernung zwischen  $a$  und  $b$ ,  $h$  diejenige zwischen  $c$  und  $d$ , so ist die Kraftlinienverteilung in jeder der beiden Hälften des unendlichen Raumes eine ausschließliche Funktion von  $g$  einerseits,  $h$  andererseits; sie hängt in der linken Raumhälfte durchaus nicht von dem Werte von  $h$ , in der rechten ebensowenig von demjenigen von  $g$  ab. Gehen wir von einem Werte von  $g$  unendlich langsam zu einem anderen über, so ist der Zustand, insbesondere die Verteilung der elektrischen Kraftlinien, jeden Augenblick so anzusehen, als ob sich das System im Gleichgewicht befände; der Raum kann also als von magnetischen Kraftlinien frei betrachtet werden. Dieser unendlich langsame Übergang kann, wenn es sich um eine Annäherung der Kugelchen handelt, dadurch bewirkt werden, daß wir die auseinanderziehende Kraft des Mechanismus um eine minimale Größe kleiner machen als die jeweilige anziehende Kraft der Kugeln. Umgekehrt werden wir jene um ein Weniges größer machen als diese, wenn sich die Kugelchen voneinander entfernen sollen.

Wir können uns überzeugen, daß eine Veränderung von  $g$  Änderungen in dem außerhalb der gläsernen Hohlkugel gelegenen Teile  $R_1$  des linken Halbraumes zur Folge hat. Es genügt dazu der Nachweis, daß sich in irgend einem Punkte

---

1) Vgl. M. Planck, l. c. p. 49.

die Kraftliniendichte ändert. Das elektrostatische Feld ist an jedem Punkte durch die Kraftliniendichte und ihre Richtung charakterisiert. Denken wir uns nun einen Augenblick die dünne gläserne Hohlkugel durch das dielektrische Medium ersetzt, so können wir das Kraftlinienbild des ganzen linken Halbraumes konstruieren, indem wir die Kraftlinien (genauer Linien der elektrostatischen Polarisation oder Induktion) von den wahren Ladungen von  $a$  und  $b$  ausgehen lassen. Diese Kraftlinien würden jetzt die geometrische Fläche, an welcher sich früher die gläserne Hohlkugel befand, einfach geradlinig durchsetzen, ohne sich in ihrem Laufe stören zu lassen (Fig. 6 a). Denken wir nun wieder die Hohlkugel dazwischen geschaltet, so stellt diese an jeder Stelle eine planparallele Platte eines Materials von einer gewissen

Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_2$  dar, welche vollständig in ein anderes Medium von einer Dielektrizitätskonstante etwa  $\epsilon_1$  eingelagert ist. Nun existiert aber für elektrische Kraftlinien, welche aus einem Medium von einer bestimmten Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_1$  in ein anderes von der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_2$  eindringen, ähnlich wie für Lichtstrahlen, „ein Brechungsgesetz“, wonach  $\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = \epsilon_1 / \epsilon_2$ .<sup>1)</sup>

Dabei ist  $\alpha_1$  der Einfallswinkel,  $\alpha_2$  der Brechungswinkel. Daraus folgt, daß eine Kraftlinie beim Passieren einer planparallelen Platte und Rückkehr in das Ausgangsmedium eine bloße Parallelverschiebung erleidet (Fig. 6 b). Die Größe dieser Parallelverschiebung kann beliebig verkleinert werden, wenn man die Platte hinreichend dünn macht. Unsere gläserne Hohlkugel wird also bei hinreichend geringer Dicke das Feld nicht beeinflussen, und wir werden es so betrachten können, als ob es homogen von dem Medium mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_1$  erfüllt wäre. Um das Feld in elektrostatischer Beziehung homogen zu machen, nehmen wir weiter noch an, daß das Material unseres Mechanismus ein Isolator von der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_1$  sei.

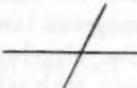


Fig. 6 a.

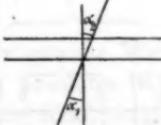


Fig. 6 b.

1) Vgl. z. B. E. Cohn, Das elektromagn. Feld. Leipzig 1900. p. 41.

Unsere linke Feldhälfte stellt nunmehr einen unendlichen, vollständig von einem homogenen Dielektrikum erfüllten Halbraum dar, der auf einer Seite durch eine leitende Ebene abgeschlossen wird und in den zwei entgegengesetzt geladene kleine Massen eingebettet sind. Die Potential- und Kraftlinienverteilung ist nun natürlich hier nicht eine solche, als wenn unser Dielektrikum sich, ohne daß die leitende Ebene dazwischenlage, einfach in dem anderen Halbraume ins Unendliche fortsetze. Denn in diesem Falle wäre die Ebene des Leiters gewiß keine Äquipotentialfläche, was sie ja doch sein muß. Aber wir können, was die Potentialverteilung im linken Halbraume anbetrifft, denselben mit Hilfe der Methode der elektrischen Bilder durch die Hälfte eines gewissen, nach allen Seiten unendlich ausgedehnten Raumes ersetzen. Dieser Raum wird von einem homogenen Dielektrikum erfüllt sein, in dem sich nur geladene Leiter eingebettet finden, die so klein sind, daß ihre Dimensionen auch schon in mäßiger Entfernung vernachlässigt werden können. In einem solchen Raum aber ist die Potentialverteilung leicht zu bestimmen.

Wir denken uns also die leitende Ebene  $L$  entfernt und unseren Halbraum in freier Kommunikation mit dem anderen unendlichen Halbraume, der ebenfalls von dem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_1$  vollständig erfüllt sei. Wenn wir hier in der Weise kleine elektrische Massen verteilen

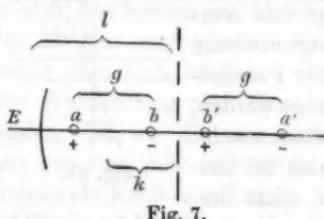


Fig. 7.

können, daß das Potential auf der geometrischen Fläche  $L$  überall gleich Null ist, so ist die Potentialverteilung im ursprünglichen Halbraume genau dieselbe wie in unserem eigentlichen Falle; denn es ist wieder wie früher das Potential

auf der ganzen Oberfläche des linken Halbraumes gleich Null und daher nach dem Greenschen Satze der Zustand im Innern genau der frühere. Nun lassen sich aber in dem rechten Halbraume leicht derartige Massen anbringen. Wir ordnen dem Punkte  $a$  den ihm in bezug auf die Ebene  $L$  spiegelbildlichen  $a'$  zu und denken uns in diesem die gleiche Elektrizitätsmenge  $e$  wie in  $a$ , aber mit entgegengesetztem Vor-

zeichen konzentriert. Dasselbe tun wir bezüglich des Punktes  $b$ . Seien  $r_a$  und  $r_b$  die Abstände eines Punktes der Ebene  $L$  von  $a$  und  $a'$ , bez.  $b$  und  $b'$ ; dann ist das Potential in diesem Punkte:

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_1 r_a} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_1 r_b} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_1 r_a} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_1 r_b} = 0.$$

Wir berechnen nun das Potential eines Punktes  $E$ , der in dem linken Halbraume auf der Verlängerung von  $AB$  außerhalb der gläsernen Hohlkugel liegt.

Sei  $k$  der Halbradius dieser Kugel,  $l$  die Entfernung von  $E$  von der Ebene  $L$ , dann ist das Potential von  $E$  (Fig. 7):

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_1} \left( \frac{1}{l-k-\frac{1}{2}g} - \frac{1}{l-k+\frac{1}{2}g} + \frac{1}{l+k-\frac{1}{2}g} - \frac{1}{l+k+\frac{1}{2}g} \right),$$

$$\frac{d\varphi}{dg} = \frac{e}{8\pi\varepsilon_1} \left( \frac{1}{(l-k-\frac{1}{2}g)^2} + \frac{1}{(l-k+\frac{1}{2}g)^2} + \frac{1}{(l+k-\frac{1}{2}g)^2} + \frac{1}{(l+k+\frac{1}{2}g)^2} \right).$$

Dieser Ausdruck ist notwendig positiv, also von Null verschieden. Nun bedeutet aber  $\varphi$  die Arbeit, welche von den elektrischen Kräften geleistet wird, wenn die Elektrizitätsmenge Eins mit ihrem Träger vom Punkte  $E$  auf beliebigem Wege, z. B. auf der Verlängerung des Durchmessers  $AB$ , in unendliche Entfernung übergeführt wird. Diese Arbeit kann auch geschrieben werden

$$\int_{l=l}^{l=\infty} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial l} \right) dl.$$

Ändert sich dieses Integral, so muß sich für gewisse Werte von  $l$  auch der Integrand  $-\partial \varphi / \partial l$ , dessen absoluter Wert die Dichte der Linien des Vektors elektrische Kraft angibt, geändert haben. Das Gleiche gilt von der Liniendichte  $|-\varepsilon_1(\partial \varphi / \partial l)|$  des Vektors elektrostatische Polarisation oder Induktion. Die Werte von  $l$  zwischen  $l = l$  und  $l = \infty$  liegen aber alle im Außenraum  $R_1$ ; folglich hat in der Tat im Außenraume mindestens an einem Punkte eine Veränderung der Dichte der Induktionslinien durch Veränderung von  $g$  stattgefunden. Die gleiche Betrachtung können wir aber auch für den Halbraum rechts von  $L$  anstellen. Eine Änderung von  $h$  bedingt ebenfalls notwendig Änderungen in der Verteilung der Induktionslinien des Raumes  $R_4$ .

Während der Veränderung von  $g$  ändert sich die Gesamtenergie des linken Halbraumes nicht, da die Veränderungen nur durch innere Vorrichtungen hervorgerufen werden und nach außen, d. h. nach dem anderen Halbraume, keine Wirkung ausgeübt wird. Da weiter der Prozeß unendlich langsam vor sich geht, so tritt außer der Energie des Mechanismus keine andere Energieart wie elektrostatische auf, und die Energieumsetzung im linken Halbraume besteht lediglich darin, daß mechanische Energie des Mechanismus in elektrostatische umgesetzt wird oder umgekehrt. Nehmen wir an, daß wir im linken Halbraume die Kugelchen voneinander entfernen, so vermehrt sich die elektrostatische Energie des ganzen Halbraumes um die bei der Entfernung der Kugeln voneinander geleistete Arbeit. Wie weit die Vermehrung auf den inneren Raum  $R_2$ , wie weit sie auf den äußeren Raum  $R_1$  entfällt, läßt sich ohne weitläufige Rechnung nicht übersehen. Wir brauchen das aber auch nicht zu wissen. Es ist nämlich jedenfalls der Betrag des äußeren Feldes  $R_1$  an elektrostatischer Energie eine Funktion

von  $g: (f(g))$ , deren Verlauf durch eine Kurve dargestellt werden kann. Diese Kurve ist entweder eine Parallele zur Abszissenachse oder hat irgend eine andere Form (Fig. 8). Ist  $f(g) = \text{konst.}$ , so stellt jede Veränderung von  $g$  einen Prozeß vor, bei welchem sich in dem Raumteile  $R_1$  und natürlich auch im Raum-

teile  $R_4$  die Energie nicht ändert, ohne daß wir überhaupt eine zusätzliche Veränderung im Raumteile  $R_3$  vorzunehmen brauchen. Ein solches Verhalten von  $f(g)$  ist aber höchst unwahrscheinlich, und wir werden daher mit der allgemeineren Funktionsform (Fig. 8) zu rechnen haben. Hier wird auf der Kurve notwendig ein endliches Stück existieren müssen, für welches  $f(g)$  entweder dauernd zu- oder dauernd abnimmt. Wegen der Symmetrie der beiden Halbräume stellt diese Funktion auch zugleich die Energie des rechten Raumteiles  $R_4$  in ihrer Abhängigkeit von  $h$  dar. Bei der Unabhängigkeit der beiden Halbräume voneinander ist dann die gesamte elektrostatische Energie des ganzen Raumes ( $R_1 + R_4$ ) gleich  $f(g) + f(h)$ . Wählen wir

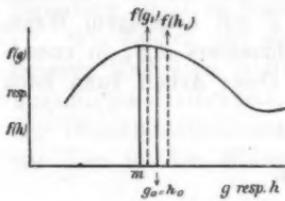


Fig. 8.

unseren Anfangszustand so, daß  $g = h = g_0 = h_0$ , und zwar so, daß  $f(g_0)$  nicht auf einem Maximum oder Minimum der Kurve liegt, und sei weiter das Extremum, dessen Ordinate dem Werte  $f(g_0)$  am nächsten kommt, bei  $g = m$  gelegen. Wir können dann im linken Halbraume den Wert von  $g$  mit konstanter unendlich langsamer Geschwindigkeit bis auf  $g_1$  verändern, wobei

$$|f(g_1) - f(g_0)| < |f(m) - f(g_0)|.$$

Wir wollen dabei dafür sorgen, daß der Mechanismus im rechten Halbraume gleichzeitig  $c$  und  $d$  in entgegengesetzter Richtung in Bewegung setzt, wobei die eintretende Änderung von  $f(h)$  das entgegengesetzte Vorzeichen haben wird wie diejenige von  $f(g)$ . In dem Augenblicke, wo  $g = g_1$ , sei  $h = h_1$ , und zwar wählen wir  $h_1$  so, daß

$$f(h_0) - f(h_1) = f(g_1) - f(g_0).$$

Das Tempo dieser Bewegung können wir so regulieren, daß wenn  $f(h_t)$  den Wert von  $h$  zur Zeit  $t$ ,  $f(g_t)$  denjenigen von  $g$  zur selben Zeit bedeutet, stets

$$f(g_t) - f(g_0) = f(h_t) - f(h_0).$$

Bei dem beschriebenen kombinierten Prozeß in den beiden Räumen  $R_2$  und  $R_3$  wird sich nun in der Tat die Summe der Energien in den Außenräumen  $R_1$  und  $R_4$  nicht ändern; denn diese Gesamtenergie ist stets

$$f(g_0) + f(h_0) = f(h_0) + f(g_0) = 2f(g_0) = 2f(h_0).$$

Trotzdem aber finden, wie wir vorher gesehen haben, in den Räumen  $R_1$  und  $R_4$  gewisse Veränderungen statt, die wegen der Unabhängigkeit der beiden Halbräume voneinander auch bei dem kombinierten Prozeß bestehen bleiben.

?) Nachweis, daß unser Teilprozeß im strahlungsfreien Vakuum ohne äußere Wirkungen verläuft.

Da es also Prozesse gibt, die sich in einem geschlossenen Raum abspielen und die trotz Konstanz von Masse, Energie und Volumen doch mit Änderungen in der Außenwelt verbunden sind, so müssen wir uns speziell überzeugen, daß unser Prozeß (der Übergang von  $T_1$  zu  $T_2$ ) im strahlungsfreien Vakuum ohne solche Veränderungen vor sich geht. Das strahlungsfreie Vakuum

enthält keine elektrischen und magnetischen Kräfte, welche durch die Existenz von Strahlung bedingt sind; es sollen weiter auch im übrigen keine elektrischen und magnetischen Kräfte darin vorkommen. Dazu ist nötig, daß die Substanz nicht etwa selbst elektrische oder magnetische Kräfte in ihrer Umgebung erzeuge. Es muß also erstens einmal durch eine für Leitung und Strahlung undurchlässige Hülle jede Ausstrahlung verhindert werden (das hatten wir schon vorausgesetzt); weiter darf die Substanz nicht etwa wahre Elektrizität oder geordneten Magnetismus besitzen. Unsere Betrachtungen beziehen sich also z. B. nicht auf elektrisch geladene Gase.

Unter diesen Bedingungen läßt sich zeigen, daß unser Prozeß ohne jede Veränderung im Außenraume vor sich gehen wird. Die denkbaren Veränderungen im Außenraume als in einem Vakuum können erfahrungsgemäß nur zweierlei Art sein. Es können sich erstens Änderungen der elektromagnetischen Zustände (inklusive der Strahlung) vollziehen; zweitens stellt jedes Vakuum, in dem sich überhaupt Masse befindet, ein Feld der Schwere dar. Wir müssen, wenn auch die Schwere nach allen bisherigen Erfahrungen merklich momentan wirkt, doch auf Grund der Tatsachen des Elektromagnetismus damit rechnen, daß, wenn man an irgend einer Stelle eine Masse in ein Vakuum hineinbringt, an allen anderen Stellen eine gewisse Zustandsänderung eintritt, die möglicherweise mit einer Änderung der Energiedichte an der betreffenden Stelle des Raumes verbunden sein könnte. Das Vakuum, in dem sich die Substanz mit den Werten  $M, V, U, T$ , gegen Strahlung abgeschlossen, befindet, ist nach dem vorigen frei von elektrischen und magnetischen Kräften, und seine einzige Zustandsbestimmung besteht demgemäß in einer gewissen Verteilung eines Gravitationsfeldes auf die Volumelemente. Tritt nun der Prozeß ein, bei dem  $M, V, U, T_1$  auf  $M, V, U, T_2$  übergeht, so bleibt dabei die Masse, wie sie durch das Verhältnis von Kraft zu Beschleunigung definiert ist, konstant; denn diese ist erfahrungsgemäß unveränderlich ohne Zufuhr oder Entfernung von Materie. Auch bleibt, da das System sowohl für  $T_1$  wie für  $T_2$  homogen ist, die Menge der Masse in jedem Volumelement dieselbe wie früher. Nun ist aber das Gravitationsfeld im Vakuum ausschließlich durch die Verteilung der Masse nach Ort und

Dichte bestimmt. Da sich also hierin durch den Prozeß nichts ändert, so ändert sich auch nichts an dem Gravitationsfelde. Ist aber dieses unveränderlich, so kann sich auch nicht etwa bei dem Prozeß etwas von seiner Energie in elektromagnetische verwandeln. Elektromagnetische Zustände erfordern aber einen gewissen Vorrat an elektromagnetischer Energie. Diese kann während des Prozesses nicht verfügbar werden; denn der Körper soll nach außen nach den Reaktionsbedingungen keine Energie abgeben; die etwa vorhandene Gravitationsenergie des Vakuums aber kann sich nach dem vorigen nicht in elektromagnetische verwandeln. Es können also, wenn keine solchen vorhanden sind, auch keine elektromagnetischen Zustände durch den Prozeß im Vakuum entstehen. Da also das Vakuum sich in bezug auf seine beiden möglichen Zustände nicht verändern kann, so kann es sich überhaupt nicht verändern, und wir sind daher sicher, daß der Prozeß sich unter den genannten Bedingungen ohne jede Änderung im Außenraume vollziehen wird. Damit ist die erforderliche Ergänzung zu dem Beweise geliefert, daß eine Beziehung von der Form existiert:

$$T = f_1(M, U, V).$$

#### B. Abhängigkeit des Druckes von Masse, Volumen und Energie.

Es ist dann die Existenz einer Relation  $p = f_2(M, V, U)$  nachzuweisen. Wir verfahren wieder so, daß wir zeigen, die Annahme,  $p$  sei noch frei verfügbar, gestatte einen Kreisprozeß anzugeben, der zu einem Widerspruch gegen den zweiten Hauptsatz führt. Die Masse  $M$  besitze wieder die Energie  $U$ , das Volumen  $V$  und den frei verfügbaren Druck  $p$ . Die Temperatur ist nach dem Vorangehenden durch  $M, U, V$  bereits mitbestimmt. Die Substanz befindet sich in einem Reservoir von der Temperatur  $T$ , am einfachsten in einem Vakuum. Sie werde nun isotherm bei dem Druck  $p$  unendlich langsam um das Volumen  $\Delta V$  ausgedehnt. Dabei bleibt die Temperatur  $T$  konstant. Das Volumen nimmt nacheinander bestimmte Werte zwischen  $V$  und  $V + \Delta V$  an, und diese beiden Angaben werden angesichts der konstant bleibenden Masse auch den jeweiligen Wert der Energie bestimmen. Es ist nämlich, wie man aus (1) schließt,

$$(2) \quad U = \varphi(T, M, V).$$

Diese Funktion ist aber eindeutig, weil die Energie laut Definition<sup>1)</sup> durch die in Betracht kommenden Variablen, von denen sie überhaupt abhängt, vollkommen bestimmt ist. Am Ende des ersten Teilprozesses habe das System die Energie  $U_1$ , die wegen der Änderung von  $V$  möglicherweise von  $U$  verschieden sein kann. Der Druck bleibt während dieses Teilprozesses frei verfügbar. Wir sind in der Lage ihn wirklich konstant auf  $p$  zu halten. Sollte er sich nämlich etwa bei der Dilatation irgendwie verändern, so können wir das System nach jedem unendlich kleinen Volumzuwachs reversibel in ein absolut strahlungsfreies Vakuum bringen und dort den Druck bei Konstanz von Energie, Masse und Volumen auf seinen alten Wert zurückführen. Das ist immer möglich; denn der für die Änderung der Temperatur gegebene analoge Beweis macht an keiner Stelle von den speziellen Eigenschaften der Temperatur Gebrauch und gilt daher auch für jeden anderen, etwa bei Konstanz der genannten Größen noch frei verfügbaren Parameter. Während dieses ersten Teilprozesses wird nach außen die Arbeit  $p \cdot \Delta V$  abgegeben. Nunmehr schließen wir das System adiabatisch ab, bringen es ins strahlungsfreie Vakuum, reduzieren dort den Druck auf  $p'$ , wobei  $p > p'$  und bringen es zurück ins Vakuum von der Temperatur  $T$ . Da wir bei dieser Druckänderung  $M, V + \Delta V$  und  $U_1$  konstant halten können, so bleibt auch  $T$  konstant. Wenn wir jetzt wieder isotherm unter Festhaltung des Druckes  $p'$  bis auf das Volumen  $V$  komprimieren, so wird von außen die Arbeit  $p' \Delta V$  aufgenommen. Da dann Volumen, Masse und Temperatur wieder den ursprünglichen Wert haben, wird das nach Gleichung (2) auch für die Energie der Fall sein. Endlich können wir (unter Transport ins strahlungslose Vakuum und Rücktransport), ohne an diesen Werten etwas zu ändern, den Druck  $p'$  auf seinen alten Wert  $p$  zurückführen. Dann befindet sich die Arbeitssubstanz wieder in ihrem alten Zustande. Hingegen ist die Arbeitsmenge  $(p - p') \Delta V$  gewonnen worden, und diese muß in Summa während der beiden isothermen Teilprozesse nach dem ersten Hauptsatz dem Reservoir entzogen worden sein. Dieses Resultat, welches der einzige Effekt des Prozesses ist, ist aber das

---

1) M. Planck, l. c. p. 39.

gleiche wie bei dem früher ausgeführten Kreisprozesse. Es wird Wärme aus einem gleichmäßig temperierten Reservoir entnommen und in Arbeit verwandelt. Das führt aber nach den dortigen Bemerkungen zum Widerspruch gegen den zweiten Hauptsatz in seiner ursprünglichen Form. Die gemachte Annahme über die Unabhängigkeit des Druckes von den genannten drei Variablen ist deshalb falsch, und es existiert eine Beziehung von der Form

$$(3) \quad p = f_2(M, U, V).$$

Wir können dann aus (1) und (3) die Energie  $U$  eliminieren und erhalten schließlich eine Relation von der Form

$$(4) \quad p = f_3(T, M, V).$$

Der Druck des betrachteten Körpers hängt<sup>1)</sup> nur von seiner inneren Beschaffenheit, nicht aber von seiner äußeren Form und seiner Masse ab; es folgt daher, daß  $p$  außer von der Temperatur nur vom Verhältnis der Masse zum Volumen, d. h. von der Dichte abhängt, bez. von dem umgekehrten Verhältnis dem Volumen der Masseneinheit  $V/M = v$ .<sup>2)</sup> Es existiert also eine bestimmte Beziehung  $p = f(v, T)$ . Das ist aber die Zustandsgleichung in der Form, wie wir sie für chemisch einheitliche Substanzen ableiten wollten.

#### Ableitung der Zustandsgleichung für Substanz-gemische.

Die Funktion  $f$  wird für chemisch verschiedene Substanzen im allgemeinen verschiedene Form besitzen. Dem gleichen Wert von Dichte und Temperatur entspricht ja erfahrungsgemäß für verschiedene Körper im allgemeinen ein anderer Wert des Druckes. Diese Verschiedenheit der Funktionsform kann sich in gewissen Fällen möglicherweise bloß auf abweichende Werte gewisser Parameter von anschaulicher physikalisch-chemischer Bedeutung reduzieren lassen. Nur diese werden dann für zwei verschiedene Substanzen einen abweichenden Wert haben, während die eigentliche Funktions-

1) M. Planck, I. c. p. 4.

2) Es ist zu bemerken, daß diese von Hrn. Planck als unmittelbar einleuchtend angenommene Aussage wesentlich verschieden ist von der Annahme einer Zustandsgleichung schlechthin.

form in beiden Fällen die gleiche ist. Die Berücksichtigung derartiger Parameter wird uns zu einer Form der Zustandsgleichung für Gemische führen. Dann werden wir die speziellen Formen der Zustandsgleichung der Herren Nernst und Planck für Gemische abzuleiten haben, um uns endlich über das gegenseitige Verhältnis dieser beiden Formen Rechenschaft zu geben.

#### A. Ableitung der einzelnen Formen der Zustandsgleichung für Gemische.

Es fragt sich zunächst, ob man ohne weiteres berechtigt ist, die Beziehungen zwischen Druck, Temperatur und Dichte auch auf Gemische chemischer Individuen zu übertragen. Das ist in der Tat der Fall; denn in unserer ganzen Ableitung haben wir in Wirklichkeit nirgends davon Gebrauch gemacht, daß der abgegrenzte Bezirk eine chemisch einheitliche Substanz enthalte. Es kann darin auch irgend ein chemisch charakterisiertes Gemisch abgegrenzt werden. Wir können also behaupten, daß für jede im Gleichgewicht befindliche homogene Masse, sie sei chemisch einheitlich oder auch ein Gemisch, eine Beziehung von der Form existiert:

$$p = f(v, T).$$

Nehmen wir also irgend eine uns von der Natur dar gebotene, im Gleichgewicht befindliche homogene Masse, von der vorausgesetzt werden soll, daß sie nicht aus einem einzigen chemischen Individuum besteht, etwa eine Quantität Petroleum von beliebigem Ursprunge und schließen sie in eine Hülle ein, so wird zu einer bestimmten Dichte und Temperatur ein ganz bestimmter Druck gehören. Nehmen wir nun eine zweite Quantität Petroleum anderen Ursprunges, so wird im allgemeinen denselben Werten der Temperatur und Dichte nicht mehr derselbe Druck entsprechen. Die beiden Petroleummengen verschiedener Herkunft sind eben „qualitativ verschieden“. Vergleicht man dagegen zwei Quantitäten verschiedenen Ursprunges von gesättigter Kochsalzlösung, die aus destilliertem Wasser und reinem Chlornatrium bereitet sind, so wird zu denselben Werten von Dichte und Temperatur wohl derselbe Druck gehören. Die beiden Lösungsmengen sind „qualitativ gleichartig“. Nun ist es erfahrungsgemäß möglich, irgend eine Substanz in eine

gewisse Anzahl untereinander qualitativ verschiedenartiger Substanzen umzuwandeln. Man kann die Umwandlung aller möglichen Substanzen in der Weise vornehmen, daß man auf solche Körper geführt wird, von denen möglichst viele untereinander wieder qualitativ gleichartig sind. Das geschieht bei der Zerlegung der Substanzen in ihre chemischen Elemente.

In der Tat zeigt sich, daß es möglich ist, die ganze Mannigfaltigkeit der in der Natur gegebenen Substanzen auf solche zurückzuführen, unter denen sich nur eine verhältnismäßig sehr geringe Anzahl qualitativ ungleichartiger (eben die verschiedenen Elemente) befinden. Nun weiß man, daß wenn man zwei qualitativ gleichartige Substanzen in der angegebenen Weise, nämlich in Elemente, zerlegt, man in beiden Fällen der Art nach dieselben Elemente und zwar in denselben Mengenverhältnissen erhält. Umgekehrt bekommt man qualitativ gleichartige Systeme, wenn man zweimal hintereinander der Art nach dieselben Elemente in den gleichen Mengenverhältnissen miteinander kombiniert.<sup>1)</sup> Zwischen einer Gesamtheit qualitativ gleichartiger Systeme und der Art und Zahl sowie den Mengenverhältnissen der Elemente, aus denen sie zusammengesetzt sind, besteht also eine eindeutige Zuordnung. Zu jeder Gesamtheit qualitativ gleichartiger Systeme, die sich bei gleichen Werten von Temperatur und Dichte nur durch ihre Massen unterscheiden können, gehört eine bestimmte Beziehung  $p = f(v, T)$ . Jeder Form von  $f$  ist also eindeutig eine Angabe über Art, Zahl und Mengenverhältnisse gewisser chemischer Elemente, nämlich derjenigen, die in der betreffenden Substanz enthalten sind, zugeordnet. Umgekehrt ist auch einer Angabe über Art, Zahl und Mengenverhältnisse gewisser Elemente eindeutig eine bestimmte Form der Funktion  $f$  zugeordnet. Dann wird eine Angabe über Art, Zahl und Mengenverhältnisse gewisser Elemente nach Fixierung von Dichte und Temperatur auch den Druck festlegen.

---

1) Natürlich ist dabei vorausgesetzt, daß diese Systeme sich in absolutem Gleichgewicht befinden und nicht etwa nur in einem relativen wie aus Metylen und Benzol gebildete Systeme, die bei gleicher elementarer Zusammensetzung doch qualitativ verschieden sind (vgl. Zeitschr. f. physik. Chemie 45. p. 468).

Betrachten wir nun eine Mannigfaltigkeit von qualitativ verschiedenen Systemen, die alle aus denselben  $n$  Elementen in verschiedenen Mengenverhältnissen aufgebaut sind. Seien die  $n - 1$  Mengenverhältnisse der  $n$  verschiedenen Elemente

$$\frac{M_1}{M_n}, \quad \frac{M_2}{M_n}, \dots, \frac{M_{n-1}}{M_n}.$$

Dann ist durch diese sowie durch  $T$  und  $v$  der Wert des Druckes festgelegt, d. h. der Druck ist eine Funktion dieser Größen:

$$(5) \quad p = G\left(T, v, \frac{M_1}{M_n}, \frac{M_2}{M_n}, \dots, \frac{M_{n-1}}{M_n}\right).$$

Die Form der Funktion  $G$  ist durch die Angabe bestimmt, daß das System aus den erwähnten  $n$  Elementen aufgebaut sein soll. Die in ihr explizite aufgeführten Variablen haben auf ihre Form keinen Einfluß mehr. Während also die Funktion  $f$  in der Gleichung  $p = f(v, T)$  nur für qualitativ gleichartige Systeme dieselbe Form hatte und bei jeder Änderung der chemischen Beschaffenheit ihre Form änderte, hat die Funktion  $G$  dieselbe Form für die ganze Mannigfaltigkeit von qualitativ verschiedenen Systemen, die sich aus den  $n$  verschiedenen Elementen aufbauen lassen. Sofern man bei der Auswahl der  $n$  Elemente sämtliche chemischen Elemente in Betracht ziehen kann, trägt die Funktion der Mannigfaltigkeit aller denkbaren, qualitativ ungleichartigen Substanzen Rechnung; man könnte so zu der allgemeinsten Form der Zustandsgleichung kommen. Dabei werden natürlich in den meisten Fällen eine große Anzahl der Parameter  $M_a/M_n$  gleich Null werden.

Sofern wir unter Zustandsgleichungen Beziehungen zwischen Druck, Temperatur und Dichte verstehen, kommt die Plancksche Annahme, daß der Zustand einer homogenen Masse durch Druck, Temperatur und die Mengenverhältnisse der Bestandteile bestimmt sei, auf eine Relation von der Form hinaus:

$$(6) \quad v = \chi\left(p, T, \frac{M_1}{M_n}, \frac{M_2}{M_n}, \dots, \frac{M_{n-1}}{M_n}\right)$$

Diese Plancksche Form folgt unmittelbar auf Gleichung (5), wenn man diese nach  $v$  auflöst. Auch die Nernstsche Form

$$(7) \quad F\left(p, T, \frac{M_1}{V}, \frac{M_2}{V}, \dots, \frac{M_n}{V}\right) = 0$$

läßt sich leicht aus dieser Beziehung herleiten. Setzen wir für die Dichte ihren Wert

$$v = \frac{\sum M_a}{V}, \quad (a = 1 \dots n)$$

so können wir die  $n$  Variablen der Gleichung (5)  $v, M_1/M_n, \dots M_{n-1}/M_n$  durch die Größen  $M_1/V, \dots M_n/V$  darstellen. Es ist nämlich

$$\frac{M_a}{M_n} = \frac{\frac{M_a}{V}}{\frac{M_n}{V}}, \quad v = \frac{M_1}{V} + \frac{M_2}{V} + \dots + \frac{M_n}{V}.$$

Führen wir diese Substitutionen in Gleichung (5) ein, so geht sie in der Tat in die Form über:

$$F\left(p, T, \frac{M_1}{V}, \dots, \frac{M_n}{V}\right) = 0.$$

Dabei bedeuten die  $M$  vorläufig noch Massen in Grammen, nicht in Grammolekülen; wenn  $m_1, \dots, m_n$  die Molekulargewichte der  $n$  Molekulgattungen (zunächst von chemischen Elementen) sind,  $\mu_1, \dots, \mu_n$  die Massen derselben in Grammolekülen, so ist allgemein  $\mu_a = M_a/m_a$ . Mit Hilfe dieser Beziehungen können wir in Gleichung (7) leicht die  $\mu$  statt der  $m$  einführen. Die  $m$  sind dann Größen, die ihren Wert bei Änderung von  $p$ ,  $T$  und der Mengenverhältnisse nicht ändern; sie hängen nur von der Zahl und Art der das System zusammensetzenden Elemente ab. Wir werden später die Geltung der Gleichung noch dadurch erweitern, daß wir unter den  $\mu$  auch Mengen von chemischen Verbindungen verstehen werden. Dann geht sie schließlich streng in die anfangs erwähnte Nernstsche Form der Zustandsgleichung über.

#### B. Identität der Nernstschen und Planckschen Form.

Ist so die Nernstsche Form in der Gleichung (5) und daher auch in der mit dieser identischen Planckschen Form (Gleichung (6)) enthalten, so ist darum noch nicht gesagt, daß sich auch die Plancksche Form aus der Nernstschen herleiten läßt. Die Plancksche Annahme könnte möglicherweise umfassender sein. Nun läßt sich aber auch die Nernstsche Gleichung in die Plancksche umformen, so daß sich dann

beide abzuleitende Formen der Zustandsgleichung als identisch herausstellen werden.

Um die Plancksche Form aus der Nernstschen herzuleiten, haben wir die  $n$  Variablen der Gleichung (7)  $M_1/V, \dots M_n/V$  durch die  $n$  Variablen der Gleichung (6)  $v, M_1/M_n, \dots M_{n-1}/M_n$  auszudrücken.<sup>1)</sup> Die erhaltenen  $n$  Substitutionsgleichungen genügen dann um (7) in (6) überzuführen. Indes genügt es für unseren Zweck, nachzuweisen, daß zwischen den  $n$  Variablen  $v, M_1/M_n, \dots M_{n-1}/M_n$  und jeder einzelnen der Variablen  $M_1/V, \dots M_n/V$  überhaupt eine Beziehung besteht, die die übrigen  $(n-1)$  Größen des zweiten Satzes nicht enthält. Jede solche Gleichung gestattet dann die Substitution einer der Variablen  $M_\gamma/V$  durch die  $n$  Größen  $v, M_1/M_n, \dots M_{n-1}/M_n$ . Wir haben also die Existenz einer Beziehung

$$H\left(\frac{M_\gamma}{V}, v, \frac{M_1}{M_n}, \dots \frac{M_{n-1}}{M_n}\right) = 0$$

für jeden Wert von  $\gamma$  herzuleiten.

Nun sind die Größen  $M_\gamma/V, v, M_1/M_n, M_2/M_n, \dots M_{n-1}/M_n$  ( $n+1$ ) Funktionen der ( $n+1$ ) Argumente  $M_1, M_2, \dots M_n, V$ . Damit zwischen diesen ( $n+1$ ) Funktionen eine Relation bestehe, muß eine gewisse Determinante verschwinden. Sind nämlich allgemein  $u_1, \dots u_{n+1}$  ( $n+1$ ) Funktionen der ( $n+1$ ) Argumente  $x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ , so besteht eine Relation zwischen  $u_1, \dots u_{n+1}$ , wenn folgende Determinante identisch verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{n+1}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix}$$

1) Hr. Professor Planck hatte die Güte mich darauf aufmerksam zu machen, daß diese Aufgabe einfacher folgendermaßen erledigt werden kann. Es ist identisch

$$\frac{M_n}{V} = \frac{v}{\left(\frac{M_1}{M_n} + \frac{M_2}{M_n} + \dots + \frac{M_{n-1}}{M_n} + 1\right)} \quad \text{und weiterhin} \quad \frac{M_\gamma}{V} = \frac{M_n}{V} \cdot \frac{M_\gamma}{M_n},$$

so daß sich ohne weiteres die Variablen des ersten Satzes durch die des zweiten ausdrücken lassen.

Es entsprechen in unserem Falle den Funktionen:

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}$$

die Werte:

$$\frac{M_1}{M_n}, \frac{M_2}{M_n}, \dots, \frac{M_{n-1}}{M_n}, \quad v = \frac{\sum M_a}{V}, \quad \frac{M_\gamma}{V}$$

und den Variablen:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$$

die Werte:

$$M_1, M_2, \dots, M_n, V.$$

Also:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \left( \frac{M_1}{M_n} \right)}{\partial M_1} = \frac{1}{M_n}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \left( \frac{M_1}{M_n} \right)}{\partial M_2} = 0, \dots,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_n} = \frac{\partial \left( \frac{M_1}{M_n} \right)}{\partial M_n} = -\frac{M_1}{M_n^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial \left( \frac{M_1}{M_n} \right)}{\partial V} = 0;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \left( \frac{M_2}{M_n} \right)}{\partial M_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \left( \frac{M_2}{M_n} \right)}{\partial M_2} = \frac{1}{M_n}, \dots, \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = 0, \dots$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_n} = \frac{\partial \left( \frac{M_2}{M_n} \right)}{\partial M_n} = -\frac{M_2}{M_n^2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_{n+1}} = 0;$$

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial u_\beta}{\partial x_n} = 0, \dots, \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \left( \frac{M_\beta}{M_n} \right)}{\partial M_\beta} = \frac{1}{M_n}, \dots,$$

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} = 0, \dots, \frac{\partial u_\beta}{\partial x_n} = \frac{\partial \left( \frac{M_\beta}{M_n} \right)}{\partial M_n} = -\frac{M_\beta}{M_n^2}, \quad \frac{\partial u_\beta}{\partial x_{n+1}} = 0;$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = \frac{\partial \frac{\sum M_a}{V}}{\partial M_1} = \frac{1}{V}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_2} = \frac{1}{V}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{V},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial \frac{\sum M_a}{V}}{\partial V} = -\frac{\sum M_a}{V^2};$$

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \frac{M_\gamma}{V}}{\partial M_\alpha} = 0, \dots, \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_\gamma} = \frac{\partial \left( \frac{M_\gamma}{V} \right)}{\partial M_\gamma} = \frac{1}{V},$$

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_\alpha} = 0, \dots, \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial \left( \frac{M_\gamma}{V} \right)}{\partial V} = -\frac{M_\gamma}{V^2},$$

Die Funktionaldeterminante lautet demnach:

							Zeilen-
							nummer
	$\frac{1}{M_n}$	0	.	.	.	$-\frac{M_1}{M_n^2}$	0
	0	$\frac{1}{M_n}$	.	.	.	$-\frac{M_2}{M_n^2}$	0
	.	.	.	.	.	.	.
	0	0	.	.	$\frac{1}{M_n}$	$-\frac{M_\beta}{M_n^2}$	0
	.	.	.	.	.	.	.
	0	0	.	.	$\frac{1}{M_n}$	$-\frac{M_{n-1}}{M_n^2}$	0
	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{V}$	.	.	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{V}$	$-\frac{\Sigma M}{V^2}$
	0	0	$\frac{1}{V}$	0	0	0	$-\frac{M_y}{V^2}$
Kolonnen-	1	2	$\dots$	$\gamma$	$\dots$	$n-1$	$n$
nummer				$\beta$			$n+1$

Diese Determinante können wir durch Vertauschung der Zeilen und Kolonnen umformen. Dabei ändert sich höchstens ihr Vorzeichen, nicht aber ihr absoluter Wert; wir können also statt des Verschwindens der ursprünglichen auch dasjenige der transponierten Determinante fordern. Wir nehmen eine Transposition in der Weise vor, daß wir die beiden letzten Zeilen voranstellen, und zwar die letzte als erste, und indem wir weiter die vorletzte Kolonne zur ersten machen, die letzte zur zweiten:

0	$-\frac{M_y}{V^2}$	0	0	.	.	$\frac{1}{V}$	.	0
$\frac{1}{V}$	$-\frac{\Sigma M}{V^2}$	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{V}$	.	.	$\frac{1}{V}$	.	$\frac{1}{V}$
$-\frac{M_1}{M_n^2}$	0	$\frac{1}{M_n}$	0	.	.	0	.	0
$-\frac{M_2}{M_n^2}$	0	0	$\frac{1}{M_n}$	.	.	0	.	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$-\frac{M_{n-1}}{M_n^2}$	0	0	0	.	.	0	.	$\frac{1}{M_n}$

Die jetzt aufgeschriebene Determinante entwickle man nach den Elementen der ersten Zeile. Man erhält:

$$\Delta = \frac{M_\gamma}{V^2} \Delta_1 + \frac{1}{V} \Delta_2.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{V}, & \frac{1}{V}, & \frac{1}{V} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{V} \\ -\frac{M_1}{M_n^2}, & \frac{1}{M_n}, & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{M_2}{M_n^2}, & 0, & \frac{1}{M_n} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ -\frac{M_{n-1}}{M_n^2}, & 0, & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{M_n} \end{vmatrix}$$
  

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{V}, & \frac{1}{V}, & \frac{1}{V} & \cdots & -\frac{\Sigma M}{V^2} & \cdots & \frac{1}{V} \\ -\frac{M_1}{M_n^2}, & \frac{1}{M_n}, & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{M_2}{M_n^2}, & 0, & \frac{1}{M_n} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\frac{M_\gamma}{M_n^2}, & 0, & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\frac{M_{n-1}}{M_n^2}, & 0, & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{M_n} \end{vmatrix}$$

Kolonnennummer } 0 1 2  $\gamma$   $n-1$

Die beiden Determinanten  $n^{\text{ten}}$  Grades  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  sind dadurch charakterisiert, daß sie aus je einer Determinante  $(n-1)^{\text{ten}}$  Grades bestehen, in der alle Glieder außerhalb der Diagonale verschwinden und die dann weiterhin noch mit einem Rande besetzt ist. Die Ausrechnung solcher Determinanten vereinfacht sich nun aber in hohem Maße. Für die Entwicklung einer Determinante nach den Elementen des Randes gilt folgender Satz<sup>1)</sup>:

1) Baltzer, Determinanten p. 41. Leipzig 1881.

$$S = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = a_{00} R - \sum_{(i, k=1, 2, \dots)} a_{i0} a_{0k} a_{ik}$$

Dabei ist  $R$  der Wert der durch Striche abgegrenzten Unterdeterminante,  $a_{ik}$  die dem Elemente  $a_{ik}$  innerhalb dieser Unterdeterminante weiter adjungierte Unterdeterminante. Sind in dem abgegrenzten System, wie tatsächlich in unserem Falle, alle Glieder außerhalb der Diagonale gleich Null, so vereinfacht sich, wovon man sich durch Berechnung der  $a_{ik}$  leicht überzeugt, die Relation zu folgender:

$$S = a_{00} a_{11} a_{22} \dots - \sum_{(l=1, 2, \dots)} a_{i0} a_{0l} a_{il} .$$

Wir berechnen  $A_1$ . Dabei ist:

$$a_{00} a_{11} a_{22} \dots = \frac{1}{V \cdot M_n^{n-1}}, \quad a_{i0} a_{0l} a_{il} = \frac{M_l}{V \cdot M_n^n},$$

$$\sum a_{i0} a_{0l} a_{il} = \frac{-\sum M_l}{V \cdot M_n^n} \quad (l=1, \dots, n-1),$$

$$A_1 = \frac{1}{V \cdot M_n^{n-1}} + \frac{\sum M_l}{V \cdot M_n^n} = \frac{\sum M_l}{V \cdot M_n^n} \quad (l=1 \dots n).$$

Bei Berechnung von  $A_2$  hat man  $a_{00} a_{11} a_{22} \dots = 0$ , da  $a_{\gamma\gamma} = 0$ . Die Adjunkten  $a_{il}$ , die im allgemeinen das Glied  $a_{\gamma\gamma}$  enthalten, reduzieren sich ebenfalls auf Null, bis auf die Adjunkte  $a_{\gamma\gamma}$ , bei deren Bildung gerade dieses Diagonalglied ausgespart ist. Es ist also

$$A_2 = -a_{\gamma 0} a_{0\gamma} a_{\gamma\gamma} = \frac{-M_\gamma \sum M_l}{V^2 \cdot M_n^n} \quad (l=1 \dots n),$$

$$A = \frac{M_\gamma}{V^2} A_1 + \frac{1}{V} A_2 = \frac{M_\gamma}{V^2} \frac{\sum M_l}{V \cdot M_n^n} - \frac{1}{V} \frac{M_\gamma \sum M_l}{V \cdot M_n^n} \equiv 0.$$

So verschwindet in der Tat die Determinante identisch, deren Verschwinden die Existenz einer Beziehung von der Form

$$H\left(\frac{M_\gamma}{V}, v, \frac{M_1}{M_n} \dots \frac{M_{n-1}}{M_n}\right) = 0$$

beweist. Besteht aber für jeden Wert von  $\gamma$  eine solche Beziehung, so ist damit nach dem früheren nachgewiesen, daß sich die Nernstsche Form der Zustandsgleichung in die Plancksche überführen läßt. Da wir bereits vorher gesehen hatten, daß man umgekehrt die Plancksche Form in die Nernstsche überführen kann, so ist damit auch die Identität beider Formen der Zustandsgleichung abgeleitet.

Die Massen  $M_1 \dots M_n$  stellen nach dem früheren Quantitäten von chemischen Elementen dar. Hr. Planck benutzt in der Tat nur solche zur chemischen Charakterisierung der Substanz.<sup>1)</sup> Hr. Nernst<sup>2)</sup> dagegen versteht unter  $M_1 \dots M_n$  auch Quantitäten von nicht gerade elementaren chemischen Individuen, in die das System zerlegt oder aus denen es aufgebaut werden kann. Nun bleiben die Betrachtungen der p. 474 ff. ebenso gültig, wenn man als Bestandteile einer beliebigen Mischung irgendwelche chemischen Individuen, die nicht Elemente zu sein brauchen, versteht. Wir können die Nernstsche Form der Zustandsgleichung also ebensogut unter dieser erweiterten Voraussetzung abgeleitet denken. Die Funktion  $G$  auf p. 476 hat auch wieder die gleiche Form für die ganze Mannigfaltigkeit qualitativ verschiedener Systeme, die sich aus den  $n$  chemischen Individuen aufbauen lassen.

#### Die Zustandsgleichung in nicht im Gleichgewicht befindlichen Systemen.

Wir hatten bei unseren bisherigen Betrachtungen stets vorausgesetzt, daß das betreffende Substanzgemisch sich im Gleichgewicht befindet und weiterhin, daß dieses Gleichgewicht durch ein Maximum der Entropie charakterisiert sei. Wären wahre Gleichgewichte auch ohne ein solches Extremum möglich, so würde, wie erwähnt<sup>3)</sup>, tatsächlich gar keine Zustandsgleichung existieren. Man kann aber auch fragen, ob denn auch in einem nicht im Gleichgewicht befindlichen System der Druck in jedem Augenblick durch Temperatur und Dichte bestimmt sei. Denken wir uns etwa eine Quantität Knallgas bei gewöhnlicher Temperatur und konstantem Volumen lang-

1) M. Planck, I. c. p. 170.

2) W. Nernst, I. c. p. 564.

3) Vgl. p. 459.

sam verbrannt. Wir nehmen also diesmal und wohl auch mit Recht an, daß die einzelnen Zustände dieses Verbrennungsprozesses, für die die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung nicht erfüllt ist, in der Tat auch keine wahren Gleichgewichtszustände darstellen. Dann wird erfahrungsgemäß der Druck nicht konstant sein. Unser früherer Beweis wird in diesem Falle ungültig. Es ist nämlich gar nicht möglich, die früher durchgeföhrten Kreisprozesse vorzunehmen, weil die Substanz eben wegen der freiwilligen, im allgemeinen irreversiblen chemischen Veränderung sich nicht auf ihren Anfangszustand reduzieren läßt. Nichtsdestoweniger bleibt es denkbar, daß in jedem Augenblick der Druck durch Temperatur und Dichte, sowie durch den augenblicklichen chemischen Zustand bestimmt sei. Zur Charakterisierung des chemischen Zustandes können in diesem Falle natürlich nicht die Mengenverhältnisse der Elemente Wasserstoff und Sauerstoff ausreichen, weil aus ihnen nur im Gleichgewicht ein Schluß auf die vorhandene Wassermenge zu ziehen ist; vielmehr ist noch eine Angabe über die Menge des Wassers nötig.

Wenn wir hier die Notwendigkeit eines bestimmten Druckwertes auch nicht thermodynamisch herleiten können, so spricht die Thermodynamik auch nicht gegen diese Ansicht. Erfahrungsgemäß ist sie in der Tat zutreffend; denn wenn wir Knallgasgemische bei gleicher Dichte und Temperatur miteinander vergleichen, die Wasserstoff, Sauerstoff und Wasser in demselben Mengenverhältnisse enthalten, so zeigt sich, daß sie denselben Druck besitzen. Bei langsam verlaufenden Prozessen, bei denen sich während der Dauer der Beobachtung keine merkliche Änderung im System vollzieht, ist es dabei praktisch zulässig, die Zeit der Druckbestimmung und Analyse als einen einzigen Moment aufzufassen. Die Schwierigkeit, den letztgenannten Fall thermodynamisch zu behandeln, röhrt wohl daher, daß die Thermodynamik überhaupt über Systeme wenig auszusagen vermag, die sich mit endlicher Geschwindigkeit irreversibel umwandeln.

#### Zusammenfassung.

Es wird versucht, die Notwendigkeit der Existenz einer Zustandsgleichung von der Form  $p = f(v, T)$  mit Hilfe der

beiden Hauptsätze der Wärmelehre und gewisser, auf Vorgänge im Vakuum bezüglicher Erfahrungstatsachen herzuleiten. Zunächst wird abgeleitet, daß die Temperatur einer homogenen Substanz durch Masse, Volumen und Energie bestimmt ist. Zum Zweck dieser Ableitung wird die Temperatur nicht thermodynamisch, sondern elektromagnetisch nach Hrn. Planck definiert, weil in der thermodynamischen Definition bereits implizite die Annahme der Zustandsgleichung steckt. Dann wird ein Kreisprozeß angegeben, welcher, wenn die Temperatur bei Konstanz von Masse, Energie und Volumen noch frei verfügbar bliebe, zu einem Widerspruch gegen den zweiten Hauptsatz in seiner Grundform führen würde. Dieser Kreisprozeß wird nicht mit einer materiellen Substanz, bei der wieder die Existenz einer Zustandsgleichung vorausgesetzt werden müßte, sondern mit einem strahlungserfüllten Vakuum durchgeführt, und zwar wird dabei die Beziehung zwischen Strahlungsdruck und Energiedichte  $\pi = \frac{1}{3} u$  als „Zustandsgleichung des Mediums Vakuum“ gedeutet. Bei diesem Kreisprozeß erweist es sich als nötig, die freie Verfügbarkeit von  $T$  dazu zu benutzen, um das System bei Konstanz der drei genannten Größen von einer Temperatur zu einer anderen überzuführen. Man muß dabei sicher sein, daß dieser Übergang nicht etwa mit irgendwelcher Veränderung außerhalb des Systems verknüpft sei. Die Konstanz von Energie, Masse und Volumen involviert noch nicht, wie an einem Falle aus der Elektrostatik gezeigt wird, daß der Prozeß ohne Änderung in der Umgebung vor sich geht. Dagegen läßt sich wegen der besonders einfachen Eigenschaften des Vakuums zeigen, daß wenn er in einem absolut strahlungslosen (absolut kalten) Vakuum eintritt, er sich ohne äußere Änderung vollziehen wird. Die einzigen denkbaren äußeren Änderungen sind nämlich elektromagnetische, die aber mangels elektromagnetischer Energie nicht zustande kommen können, und Änderungen in der Beschaffenheit des Gravitationsfeldes, das das System im Vakuum erzeugt; dieses Feld kann sich aber wegen der erfahrungsgemäßen Proportionalität der gravitierenden und tragen Masse nicht ändern. Daß der Prozeß in einem Vakuum überhaupt vor sich gehen kann, wird noch besonders gezeigt. In ähnlicher Weise wird abgeleitet, daß auch der Druck durch Masse,

Energie und Volumen bestimmt ist, und aus beiden Beziehungen wird durch Elimination der Energie die Zustandsgleichung  $p = f(v, T)$  gewonnen.

Dann wird die Form der Zustandsgleichung unter Berücksichtigung der chemischen Zusammensetzung der Substanz hergeleitet und zwar in den beiden Formen

$$F\left(\frac{M_1}{V}, \frac{M_2}{V}, \dots \frac{M_n}{V} p, T\right) = 0 \text{ und } v = \chi\left(p, T, \frac{M_1}{M_n}, \dots \frac{M_{n-1}}{M_n}\right).$$

Es wird die Identität dieser beiden, der Nernstschen und Planckschen Form der Zustandsgleichung, nachgewiesen. Endlich wird die Bedeutung der Zustandsgleichung für Systeme, die sich nicht im Gleichgewicht befinden, erörtert.

Berlin, November 1905.

(Eingegangen 19. Dezember 1905.)

**2. Über die Konstitution des Elektrons;<sup>1)</sup>**  
**von W. Kaufmann.**

(Hierzu Taf. IV, Figg. 10 u. 11.)

**Einleitung.**

Im Jahre 1881 wies Hr. J. J. Thomson<sup>2)</sup> nach, daß ein elektrisch geladener Körper wegen des magnetischen Feldes, das er nach der Maxwellschen Theorie durch seine Bewegung hervorruft, sich äußeren Kräften gegenüber so verhalten müsse, als sei seine Masse um einen gewissen von der Größe seiner Ladung und seiner Form abhängigen Betrag vergrößert. Nachdem dann im Jahre 1889 O. Heaviside<sup>3)</sup> die Verzerrung des von einer geladenen Kugel mitgeführten Feldes berechnet hatte, die eintritt, wenn die Geschwindigkeit der bewegten Ladung mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar wird, zeigte Hr. Thomson<sup>4)</sup> ferner, daß bei derartigen Geschwindigkeiten der von ihm angegebene Massenzuwachs nicht mehr konstant sei, sondern mit wachsender Geschwindigkeit zunehme. Die ge-

1) Unter dem gleichen Titel habe ich bereits einen kurzen Auszug dieser mit gütiger Unterstützung der Berliner Akad. d. Wissensch. ausgeführten Untersuchung in den Berl. Ber. 45, p. 949. Nov. 1905 veröffentlicht. Für diejenigen Leser, die sich im wesentlichen nur für das allgemeine Resultat interessieren, bietet die folgende Abhandlung nichts Neues. Sie enthält eine genaue Darstellung der angewandten Versuchsanordnung und im Anhange auch die wichtigsten Messungsprotokolle, um jederzeit eine Nachprüfung der Zahlen und ihrer Fehlergrenzen zu gestatten. Sie enthält ferner eine verbesserte Darstellung der in anderer Form bereits in meinen früheren Veröffentlichungen über den gleichen Gegenstand mitgeteilten Theorie der Bahnkurve. Endlich sind im Anhang noch einige Dinge behandelt, die mir wichtig schienen, die aber im Haupttext untergebracht den Zusammenhang zu sehr gestört hätten. Einige der im Auszuge mitgeteilten Zahlen wiesen bei nochmaliger Nachprüfung noch einige kleine Fehler in der letzten Stelle auf, die hier korrigiert sind.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 11. p. 229. 1881.

3) O. Heaviside, Phil. Mag. April 1889.

4) J. J. Thomson, Rec. Researches p. 21.

samte träge Masse einer bewegten Ladung müsse also eine Funktion ihrer Geschwindigkeit sein.

Die Beobachtungen an Kathodenstrahlen ergaben zunächst keine derartige Veränderlichkeit der trägen Masse, was auch nicht weiter auffallen konnte, da die in bequemer Weise erreichbaren Geschwindigkeiten noch zu klein waren, um eine merkbare Massenvermehrung zu bedingen. Der experimentelle Nachweis der Massenveränderlichkeit bei diesen Strahlen gelang erst Hrn. H. Starke<sup>1)</sup> einige Zeit, nachdem Verfasser<sup>2)</sup> durch Beobachtung der  $\beta$ -Strahlen des Radiums die tatsächliche Veränderlichkeit der Masse mit der Geschwindigkeit nachgewiesen hatte.

Die  $\beta$ -Strahlen des Radiums zeigen, wie bekannt, qualitativ dieselben Eigenschaften, wie die Kathodenstrahlen; sie sind magnetisch<sup>3)</sup> und elektrisch<sup>4)</sup> ablenkbar und führen elektrische Ladung mit sich.

In quantitativer Hinsicht dagegen zeigen sie sich von den Kathodenstrahlen insoweit schon einer rohen Beobachtung gegenüber verschieden, daß sie ein viel größeres Durchdringungsvermögen besitzen, als diese. Da nun das Durchdringungsvermögen der Kathodenstrahlen bekanntlich mit der Geschwindigkeit wächst, so lag die Vermutung nahe, daß die  $\beta$ -Strahlen eine bedeutend höhere Geschwindigkeit besäßen, als die Kathodenstrahlen. Dann war aber auch zu hoffen, daß für die  $\beta$ -Strahlen sich die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit deutlich zeigen würde. Diese Vermutung wurde durch meine im Jahre 1900<sup>5)</sup> ausgeführten, noch ziemlich rohen Messungen bestätigt. Die sehr große Veränderlichkeit der Masse bewies ferner, daß der Anteil an rein elektromagnetischer Masse ein sehr großer, wenn nicht gar überwiegender im Vergleich zu etwaiger mechanischer oder materieller Masse ist. Der Versuch einer Berechnung beider

1) H. Starke, Verh. d. D. Physik. Ges. 5. p. 241. 1903.

2) W. Kaufmann, Gött. Nachr. 1901. Heft 1; 1902. Heft 5; 1903. Heft 3. Phys. Zeitschr. 4. p. 55. 1902.

3) F. Giesel, Wied. Ann. 69. p. 884. 1899; St. Meyer u. E. v. Schweidler, Phys. Zeitschr. 1. p. 90. 1899; H. Becquerel, Compt. rend. 129. p. 996. 1899.

4) H. Becquerel, Compt. rend. 130. p. 819. 1900; E. Dorn, Abh. Nat. Ges. Halle 22. p. 44. 1900.

5) W. Kaufmann, l. c.

Anteile führte zu keinem richtigen Ergebnis, da damals als theoretische Grundlage nur die von Hrn. Searle<sup>1)</sup> angegebene Gleichung für die Energie des Elektrons vorlag, aus der sich zwar mittels des Energiegesetzes die „*longitudinale*“, d. h. die für tangentielle Beschleunigungen in Betracht kommende, nicht aber die „*transversale*“ Masse berechnen ließ, mit der man es bei der von mir beobachteten elektrischen oder magnetischen Ablenkung senkrecht zur ursprünglichen Bahnrichtung zu tun hat.

Nachdem die Theorie dann von Hrn. M. Abraham<sup>2)</sup> durch Aufstellung der strengen Formel für die transversale Masse ergänzt worden war, wurden die Versuche von mir mit verbesserter Anordnung wiederholt<sup>3)</sup>, mit dem Ergebnis, daß die Messungsresultate durch die Abrahamsche Formel innerhalb der Beobachtungsfehler ausreichend dargestellt werden, daß man also die Masse des Elektrons als rein elektrische Masse betrachten kann.

Bei der Berechnung des Feldes für das rasch bewegte Elektron war von Hrn. Abraham die kinematische Grundannahme gemacht, daß das Feld des Elektrons sich nach außen hin bis ins Unendliche erstreckte, nach innen aber bis zur Oberfläche einer Kugel von konstantem Radius  $a$ . Innerhalb dieser Kugel sollte das Feld entweder Null sein (Oberflächenladung), oder nach einem bestimmten Gesetz abnehmen (gleichmäßige Volumenladung). Das Elektron sollte sich also verhalten, wie sich unter Zugrundelegung der Maxwellschen Gleichungen für den leeren Raum eine starre Kugel verhalten würde, der eine gleichmäßige Oberflächen- oder Volumenladung erteilt ist; mit anderen Worten: es wurde das makroskopische Verhalten einer auf einer bestimmten Fläche oder in einem bestimmten Raume gesetzmäßig verteilten Menge von Elektronen auf das mikroskopische Bild des einzelnen Elektrons formell übertragen. Diese Grundannahme über die Konstitution des Elektrons soll im folgenden als die Theorie des

#### *starren Elektrons*

bezeichnet werden.

1) G. Searle, Phil. Mag. (5) 44. p. 840. 1897.

2) M. Abraham, Gött. Nachr. 1902.

3) l. c.

Durch die gute Übereinstimmung meiner Messungen mit dieser Theorie schien die Frage nach der Konstitution des Elektrons zunächst einigermaßen abgeschlossen. Da erschien im Jahre 1904 eine Arbeit von Hrn. H. A. Lorentz<sup>1)</sup>, in der der Versuch gemacht wurde, durch in bestimmter Weise modifizierte Grundannahmen über das Elektron und auch über die zwischen den materiellen Körperteilchen wirkenden Molekularkräfte die Schwierigkeiten zu beseitigen, die in der Optik bewegter Körper noch immer bestanden. Während nämlich die ursprüngliche Lorentzsche Theorie<sup>2)</sup> einen Einfluß zweiter Ordnung<sup>3)</sup> der Erdbewegung auf gewisse optische und elektromagnetische Phänomene ergab, führten alle Versuche, diese Einflüsse experimentell nachzuweisen<sup>4)</sup>, bisher stets zu einem negativen Ergebnis, so daß sich schließlich die Überzeugung Bahn brach, daß ein derartiger Einfluß vielleicht prinzipiell überhaupt nicht vorhanden sei, und daß man die Grundgleichungen der Elektrodynamik so zu modifizieren habe, daß die auf irgend ein willkürlich definiertes Koordinatensystem bezogenen „Absolutgeschwindigkeiten“ zwar als Rechnungsgrößen in den Grundgleichungen auftreten konnten, sich aber in den Endresultaten herausheben mußten, so daß die beobachtbaren Größen nur von den ebenfalls direkt beobachtbaren „Relativgeschwindigkeiten“ der ponderablen Körper gegen einander abhingen.

Hr. Lorentz zeigte nun, daß man zu einem derartigen Resultat gelangen könnte, wenn man annahm, daß die Dimensionen aller physikalischen Körper, einschließlich ihrer einzelnen Moleküle und der Elektronen, ihre Gestalt in ganz bestimmter Weise mit der Geschwindigkeit veränderten; es sollten nämlich, wenn  $q$  die Geschwindigkeit des Systems,  $c$  die Licht-

1) H. A. Lorentz, Versl. Kon. Akad. v. Wet. te Amsterdam.  
27. Mai 1904.

2) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie etc. Leiden 1895.

3) Das heißt einen Einfluß, dessen Größe proportional dem quadratischen Verhältnis  $q^2/c^2$  der Erdgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit ist.

4) Literatur vgl. H. A. Lorentz, „Elektronentheorie“ in der Enzyklopädie d. mathematischen Wissenschaften, sowie die soeben zitierte Arbeit desselben Verfassers.

geschwindigkeit bedeutet, sämtliche Abmessungen in Richtung der Bewegung sich im Verhältnis

$$(1 - q^2/c^2)^{1/2}$$

verkürzen, die Querdimensionen dagegen unverändert bleiben.

Zu dieser geometrischen Grundannahme fügte er noch die physikalische hinzu, daß sämtliche Molekularkräfte sich in derselben Weise mit der Geschwindigkeit ändern, wie elektrostatische Kräfte, und daß die „Massen“ der Mechanik sich ebenso ändern, wie die elektromagnetische Masse des Elektrons.

Aus den genannten Annahmen ergab sich sodann eine völlige Unabhängigkeit aller beobachtbaren Erscheinungen von der Absolutgeschwindigkeit.

Es ist nicht zu erkennen, daß diese Beweisführung in einer Hinsicht etwas Unbefriedigendes an sich hat: Es wird mit einer Größe gerechnet, die maßgebend für die Gestalt der Körper sein soll, nämlich der „absoluten Geschwindigkeit“, oder der „Geschwindigkeit relativ zum Lichtäther“, die wir eigentlich gar nicht definieren können, da ja das Resultat der soeben beschriebenen Rechnung derartig ist, daß es keine Mittel gibt diese Geschwindigkeit auch nur durch ein Gedankenexperiment zu bestimmen. Wir können nicht einmal den Betrag der zu einer beobachtbaren Relativgeschwindigkeitsänderung  $q$  gehörigen Deformationsänderung angeben, solange wir nicht die Absolutgeschwindigkeit  $q_0 + q$  kennen. Denn ist die ursprüngliche Länge eines Körpers  $l_0$ , so wird sie durch  $q_0$  in

$$l = l_0 \left(1 - \frac{q_0^2}{c^2}\right)^{1/2} \text{ deformiert}$$

und durch  $q^0 + q$  in

$$l' = l_0 \cdot \left(1 - \frac{(q_0 + q)^2}{c^2}\right)^{1/2}.$$

Die einem beobachtbaren Geschwindigkeitszuwachs entsprechende Längeänderung  $\delta l = l' - l$  ist also Funktion nicht bloß von  $q$ , sondern auch von  $q_0$ . Da wir nun kein Recht haben anzunehmen, daß unser Fixsternsystem, auf das wir die Bewegung der Erde beziehen, sich gerade in absoluter Ruhe zum Äther befindet, so können wir über die eintretenden Deformationen eigentlich gar nichts aussagen.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß von ganz anderen

Voraussetzungen ausgehend Hr. Einstein<sup>1)</sup> jüngst zu Resultaten gelangt, die in ihren *der Beobachtung zugänglichen* Folgerungen mit den Lorentzschen übereinstimmen, bei denen aber die eben erwähnten Schwierigkeiten erkennistheoretischer Art vermieden sind. Hr. Einstein führt das *Prinzip der Relativbewegung*, wenigstens soweit es sich um Translationen handelt, als Postulat ein. Er stellt also den Satz an die Spitze, daß die innerhalb irgend eines starren Systems beobachtbaren physikalischen Erscheinungen unabhängig davon sein müssen, ob das System sich mit samt dem Beobachter relativ zu irgend einem anderen System bewegt. Hieraus ergibt sich sofort durch Anwendung auf die Fortpflanzung des Lichtes eine neue Definition der Zeit und des Begriffs „gleichzeitig“ für zwei räumlich getrennte Punkte, und zwar sind für einen Beobachter in einem System  $k$ , das sich relativ zu einem anderen Normalsystem  $K$  bewegt, zwei an verschiedenen Punkten erfolgende Ereignisse dann gleichzeitig, wenn für einen in  $K$  ruhenden Beobachter zwei Größen gleich werden, die formell identisch sind mit der von Hrn. Lorentz eingeführten „Ortszeit“. Ferner ergibt sich, wenn für einen mitbewegten, also in  $k$  ruhenden Beobachter dem obigen Postulat entsprechend alle Eigenschaften, also auch die geometrischen Dimensionen unverändert bleiben, daß dann für einen in  $K$  ruhenden Beobachter die von  $K$  aus betrachteten „gleichzeitigen“ Abmessungen eines Gebildes gerade in der Weise verändert erscheinen müssen, wie es bei Lorentz als hypothetische Grundannahme eingeführt wird. Ferner wird die völlige Reziprozität aller gefundenen Gesetze, d. h. die Vertauschbarkeit der Systeme  $K$  und  $k$ , des „ruhenden“ und des „bewegten“ Systems nachgewiesen. Die der Beobachtung zugänglichen Resultate sind also bei beiden Verfassern dieselben; während aber Lorentz nur zeigt, daß seine Hypothesen zu dem verlangten Resultat führen, ohne dadurch auszuschließen, daß auch auf andere Weise dasselbe erreichbar, zeigt Hr. Einstein, daß, wenn man das verlangte Resultat, nämlich das Prinzip der Relativbewegung für die gesamte Physik an die Spitze stelle, dann notwendig die Kinematik des starren

---

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 17. p. 891. 1905.

Körpers in der angegebenen Weise verändert werden müsse und daß die Gleichungen der Elektrodynamik<sup>1)</sup> die von Hrn. Lorentz und ihm angegebene Form erhalten müssen.

Beide Verfasser geben nun auch die Bewegungsgleichungen für ein in der angegebenen Weise deformiertes Elektron an, die sich von den Abrahamschen Gleichungen sehr wesentlich unterscheiden. Eine Anwendung der Gleichungen auf meine bisherigen Messungen durch Hrn. Lorentz führte zu dem überraschenden Resultat, daß meine Beobachtungen durch sie mit derselben Genauigkeit darstellbar seien, wie durch die Abrahamschen Gleichungen für das starre Elektron.

Es zeigte sich jedoch, daß die Geschwindigkeitswerte, die man den einzelnen von mir gemessenen Kurvenpunkten beilegen mußte, um zu einem Anschluß an die Lorentzsche Formel zu gelangen, um 5—7 Proz. kleiner waren, als sie sich nach der Abrahamschen Formel ergaben. Damit war zugleich ein Weg gegeben, zwischen beiden Theorien zu entscheiden:

Wenn es gelang, die den einzelnen Kurvenpunkten (vgl. w. u.) zugehörigen Geschwindigkeiten unabhängig von der zugrunde gelegten Theorie über das Elektron, direkt aus den Konstanten der Versuchsanordnung — im folgenden als „Apparatkosten“ bezeichnet — zu bestimmen, und diese Werte mit denen zu vergleichen, die sich nach der einen oder anderen Theorie aus der Gestalt der photographierten Kurve — aus den „Kurvenkonstanten“ — ergaben, dann konnte der größere oder geringere Grad der Übereinstimmung zwischen den beiden Wertsystemen als Kriterium für die Richtigkeit einer der beiden Theorien dienen. Natürlich schien es von vornherein nicht ausgeschlossen, daß vielleicht auch keine von beiden Theorien genügend genaue Übereinstimmung ergab, oder daß auch noch andere Grundannahmen zu einem befriedigenden Ergebnis führen könnten.

Durch Hrn. Abraham<sup>2)</sup> wurde darauf hingewiesen, daß die Lorentzsche Deformation des Elektrons eine Arbeit erfordere, so daß man, um nicht mit dem Energiegesetz in Widerspruch zu geraten, eine „innere potentielle Energie“ des

1) Vorausgesetzt, daß für relativ ruhende Körper die Maxwellischen Gleichungen als gültig angesehen werden.

2) M. Abraham, Theorie der Elektriz. II, Kap. 8. Leipzig 1905.

Elektrons annehmen müsse; eine rein elektromagnetische Begründung der Mechanik des Elektrons und somit auch der Mechanik überhaupt sei demnach als unmöglich erwiesen, falls neue Messungen die Richtigkeit der Lorentzschen Theorie ergeben sollten. Dieser Schluß bliebe natürlich auch dann richtig, wenn man an Stelle der Arbeit einer unbekannten inneren Energie des Elektrons nach Hrn. Poincarés<sup>1)</sup> Vorschlag einen ebenso unbekannten universellen äußeren Druck einführe, der die notwendige Kompressionsarbeit am Elektron leistete.

Von diesen Schwierigkeiten frei ist außer der Abrahamschen auch noch eine dritte Grundhypothese über das Elektron, die Hr. Bucherer<sup>2)</sup> eingeführt hat<sup>3)</sup>; dieser nimmt an, daß das Elektron sich bei *konstantem Volumen* deformiere, und zwar so, daß das Achsenverhältnis des entstehenden Ellipsoides stets dem sogenannten „Heavisideellipsoid“<sup>4)</sup> entspreche. Da dasselbe Achsenverhältnis auch für das Lorentzsche Elektron gilt, so kann man die von Hrn. Bucherer für Masse, Energie und Impuls des Elektrons angegebenen Gleichungen ohne weiteres aus den Lorentzschen ableiten, wenn man an Stelle des unveränderlichen Querdurchmessers  $a$  des Elektrons, der als Parameter in den Lorentzschen Gleichungen auftritt, einen von der Geschwindigkeit abhängigen Querdurchmesser einführt, der so zu bemessen ist, daß das Volumen des Ellipsoides gleich dem der ursprünglichen Kugel. Beim Differenzieren nach der Geschwindigkeit — bei der Berechnung der longitudinalen Masse — ist dann natürlich auch die Veränderlichkeit der Querdimensionen mit zu berücksichtigen.

Wenn nun auch wegen der Eindeutigkeit der Beweisführung bei Lorentz und Einstein ohne weiteres klar ist, daß das Bucherer'sche Elektron die Einflüsse der Absolutgeschwindigkeit nicht in aller Strenge beseitigen kann, so

1) A. Poincaré, Compt. rend. 140. p. 1504. 1905.

2) A. Bucherer, Math. Einführung in d. Elektronentheorie p. 58. Leipzig 1904.

3) Durch Hrn. M. Abraham wurde ich brieflich darauf aufmerksam gemacht, daß die Deformationsarbeit bei dem Bucherer'schen Elektron gleich Null ist.

4) d. h., daß  $b : a = \sqrt{1 - \beta^2}$ , wo  $\beta = q/e$ .

ist doch von vornherein wahrscheinlich, daß wenigstens die Effekte zweiter Ordnung auch bei diesem wenigstens zum Teil beseitigt werden. Mit der Diskussion dieser Frage ist Hr. Bucherer zurzeit noch beschäftigt. Jedenfalls erschien es angezeigt, auch das Bucherer'sche Elektron in den Kreis der Betrachtung zu ziehen.

Ich nehme das allgemeine Resultat der im folgenden beschriebenen Messungen gleich hier vorweg:

*Die Messungsergebnisse sind mit der Lorentz-Einstein'schen Grundannahme nicht vereinbar. Die Abrahamsche und die Bucherer'sche Gleichung stellen die Beobachtungsresultate gleich gut dar. Eine Entscheidung zwischen beiden durch Messung der transversalen Masse der  $\beta$ -Strahlen erscheint einstweilen als unmöglich.*

#### Abteilung I.

##### Versuchsanordnung bei der Aufnahme der Kurven.

1. *Allgemeines.* Die allgemeine Anordnung zur photographischen Bestimmung der magnetischen und elektrischen Ablenkung der  $\beta$ -Strahlen ist bereits in den früheren Abhandlungen (I. c.) ausführlich beschrieben. Das Grundprinzip besteht in der gleichzeitigen Einwirkung zweier paralleler Felder, eines magnetischen und eines elektrischen, durch die aufeinander senkrechte Ablenkungen hervorgebracht werden. Infolge der Inhomogenität der Strahlung erhält man eine Ablenkungskurve; jeder Punkt der Kurve entspricht einer bestimmten Geschwindigkeit und einer bestimmten Masse des Elektrons. Durch Umkehren des elektrischen Feldes erhält man zwei symmetrische Kurvenäste, deren Mittellinie die Richtung der magnetischen Ablenkung bestimmt.

Die jetzige Versuchsanordnung unterscheidet sich von der früheren bloß dadurch, daß alle Einzelheiten auf die Erzielung größtmöglicher Genauigkeit hin eingerichtet sind. Eine Betrachtung der den verschiedenen Theorien entsprechenden Kurven zeigte, daß diese nur sehr wenig voneinander abweichen<sup>1)</sup>, und daß deshalb nur eine sehr große Genauigkeit namentlich in der Bestimmung der Apparatdimensionen und der Feldstärken zu

1) Man betrachte die aus den Beobachtungen abgeleitete Kurve in Fig. 11, sowie die nach den hier vorliegenden Theorien berechneten Punkte.

dem erwünschten Ziele einer Entscheidung zwischen den vorliegenden Theorien führen konnte.

2. *Der Aufnahmearrapparat (Fig. 1). Der in Fig. 1 in natürlicher Größe abgebildete Apparat<sup>1)</sup> bestand im wesentlichen*

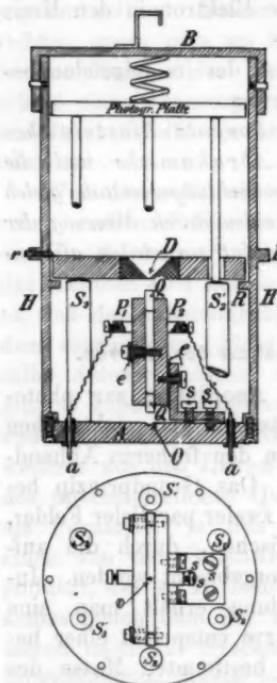


Fig. 1 (nat. Gr.).

oberen Säulenflächen waren so abgeschliffen, daß ihre gemeinsame Tangentialebene mit der Innenfläche von  $A$  genau parallel war; die Prüfung der Parallelität geschah auf optischem Wege, indem eine planparallele Glasplatte (die bei senkrechter Beleuchtung mit Na-Licht und senkrechter Durchsicht die Haidingerschen Ringe zeigte) an Stelle des Diaphragmas auf die Säulen gelegt und dann mit einem auf  $\infty$

1) Der Apparat wurde von Hrn. Mechaniker M. Wolz in Bonn mit hervorragender Sorgfalt hergestellt.

wie früher in einem lichtdichten Messinggehäuse  $H$ , auf dessen Boden  $A$  in einer kleinen Vertiefung  $O$  sich das Radiumkörnchen befand. Die von ihm ausgehenden  $\beta$ -Strahlen durchlaufen den Zwischenraum zwischen zwei Kondensatorplatten  $P_1$  und  $P_2$ , treten durch ein Diaphragma  $D$  von 0,2 mm Durchmesser und fallen dann auf die photographische Platte. Bei der konstruktiven Durchführung des Apparates kam es im wesentlichen darauf an, für absolute Unveränderlichkeit und genaue Meßbarkeit aller in Betracht kommender Dimensionen zu sorgen.

Die Innenfläche der Bodenplatte  $A$  war optisch eben geschliffen; drei Säulen  $S_1$   $S_2$   $S_3$  trugen auf ihren leicht abgerundeten Endflächen eine Messingplatte, in deren Mitte das aus Platin hergestellte Diaphragma eingelassen war. Die Unterseite dieser Platte war ebenfalls optisch eben geschliffen. Die abgerundeten

eingestellten Fernrohr und Gaußschem Okular von oben visiert wurde. Die Spiegelbilder, von der Glasplatte einerseits und von  $A$  andererseits herrührend, fielen vollkommen zusammen. In derselben Weise wurde auch die richtige Justierung der drei Säulen  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  geprüft, die das Diaphragma frei durchsetzend auf ihren Endflächen die photographische Platte trugen. Die Durchbohrung des Diaphragmas war sorgfältig so ausgeführt, daß die konische Öffnung bis genau an die untere Fläche reichte, und kein zylindrisches Stück übrig blieb.<sup>1)</sup> Drei Stellschrauben  $r$  dienten zur Zentrierung des Diaphragmas.

Zwischen Grundplatte und Diaphragma befand sich der zur Erzeugung des elektrischen Feldes dienende Plattenkondensator, aus zwei optisch ebengeschliffenen Messingplatten bestehend; ihre Entfernung war in völlig unveränderlicher Weise durch vier Quarzplättchen  $Q$  festgelegt, die aus einer einzigen parallel zur Achse geschnittenen<sup>2)</sup> planparallelen Platte hergestellt waren. Als Träger des ganzen Kondensators diente ein Messingwinkel, der durch Zug- und Druckschrauben  $s$  derart an der Bodenplatte befestigt war, daß seine Neigung in engen Grenzen verändert werden konnte. Zur Isolation der Platte von dem Träger dienten Zwischenlagen  $e$  aus Elfenbein, das in Paraffin ausgekocht war. Ebenso war die Schraube, durch die die beiden Platten zusammengehalten wurden, von  $P_1$  durch Elfenbein isoliert. Die genaue Senkrechtheitstellung des Kondensators gegen die Grundplatte erfolgte dadurch, daß der Apparat nach Entfernung der Hülse horizontal auf dem Tisch eines Spektrometers befestigt und der Winkel zwischen den Normalen der Grundplatte und eines der Quarzplättchen mittels Gaußschen Okulars bestimmt wurde. Das Resultat der Einregulierung war schließlich eine Abweichung von der Senkrechtheitstellung von nur zwei Bogenminuten nach der Seite der Platte  $P_2$  hin. Die Löcher für die Schrauben  $s$  hatten

1) Eine mikroskopische Prüfung ergab, daß eine etwaige Unschärfe der Kante höchstens  $\frac{1}{50}$  mm betrug. Dann würde als Diaphragmenebene an Stelle der unteren Fläche der das Diaphragma tragenden Platte eine um  $\frac{1}{40}$  mm höhere Fläche zu gelten haben. Der Fehler in den Resultaten infolge dieser Unsicherheit beträgt höchstens 1 Promille.

2) Bei dieser Orientierung ist die Isolationsfähigkeit des Quarzes am besten.

etwas Spielraum, so daß durch kleine Verschiebungen des ganzen Kondensators die Vertiefung  $O$  zur Aufnahme des Radiums genau in die Mitte zwischen beide Platten gebracht werden konnte. Da man beim Visieren mit einem Mikroskop von oben gleichzeitig mit  $O$  auch seine beiden Spiegelbilder in den Platten sah, so war die Genauigkeit der Einstellung eine ziemlich große. Die Kanten der Platten waren sehr exakt bearbeitet, ihr Krümmungsradius betrug höchstens  $\frac{1}{1000}$  mm. Diese Genauigkeit war sehr wichtig, da der Verlauf des elektrischen Feldes an einem 29fach vergrößerten Modell des Kondensators ausgemessen werden sollte.

Die Zuleitung zum Kondensator geschah durch die Drähte  $a, a$ , die ebenfalls durch Elfenbein isoliert durch den Boden hindurchgeführt waren.

Dicht unter dem Diaphragma, doch ohne dieses zu berühren, befindet sich an der Innenseite der Hülse ein Ring  $R$ , der den lichdichten gegenseitigen Abschluß der beiden Apparathälften bewirkt. Er sollte verhindern, daß etwaige leuchtende Entladungen zwischen den Kondensatorplatten die photographische Platte verschleierten. Es konnte höchstens noch

Licht durch das Diaphragma selbst dringen. Selbstverständlich wurde nach Möglichkeit darauf gesehen, daß solche Entladungen vermieden wurden. Von einer Einhüllung der Platte in Aluminiumfolie sah ich ab, einmal um keine Unsicherheiten in der Plattenentfernung durch Unebenheiten der Folie hereinzu bringen, dann aber auch, um das stärker ablenkbare und absorbierbare Ende des  $\beta$ -Strahlenspektrums ungeschwächt auf die Platte zu bekommen.

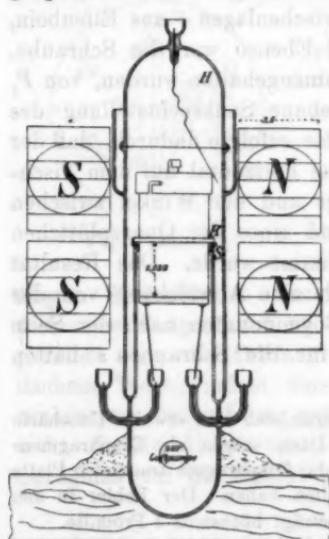


Fig. 2 (nat. Gr.).

Fig. 2 zeigt den Aufnahmegerät im Innern eines Glasgefäßes zwischen den Polen der zur Erzeugung des magne-

tischen Feldes dienenden Magnete. Der an der Außenseite der Hülle befindliche Ring  $R'$  sitzt auf einem Ringe  $S$ , der in den Glasapparat eingekittet ist. Die Zuführung zu den Kondensatorplatten und die Ableitung der Hülle zur Erde geschieht durch Vermittelung von Quecksilbernäpfchen. Der ganze Glasapparat ist mittels Gips auf einer Holzplatte befestigt. Zum bequemen Öffnen des Apparates beim Wechseln der Platten dient eine aufgeschliffene glockenförmige Haube  $H$ , die durch Quecksilber abgedichtet ist; die bei derartigen Anordnungen meist benutzten konischen Schliffe erwiesen sich als ziemlich unpraktisch, da das Öffnen immer große Schwierigkeiten machte; der sehr schmale ebene Schliff, den ich schließlich anwandte, ließ sich mit Fett nicht dichten; das Hg floß stets hindurch. Die Dichtung gelang jedoch in durchaus sicherer Weise durch Wachs, das auf die vorher erwärme Glocke aufgestrichen und dann mit dieser angedrückt wurde; ein leichter seitlicher Druck genügte zum Öffnen nach beendiger Exposition.

3. *Die Magnete.* Zur Erzeugung des Magnetfeldes dienten zwei sehr kräftige Lamellenmagnete von 30 cm Schenkellänge, die einer alten Stöhrerschen magnetoelektrischen Maschine entnommen waren. Es braucht kaum besonders betont zu werden, daß die Benutzung permanenter Magnete von genügender Stärke einen großen Vorteil vor der Anwendung von Elektromagneten bietet, da alle Schwierigkeiten wegen der tagelangen Konstanthaltung des Erregungsstromes wegfallen. Nachdem eine rohe Bestimmung genügende Feldstärke ergeben hatte (ca. 140 Gauss, vgl. w. u. p. 513) wurde mittels Eisenfeilicht die Stelle maximaler Feldstärke, also auch größter Homogenität aufgesucht<sup>1)</sup> und durch einen Querstrich auf der oberen Fläche markiert. Dann wurden die auf einem Holzklotz unverrückbar befestigten Magnete auf einer großen in die Wand eingemauerten Marmorplatte (die überhaupt für alle Versuche und Messungen als Tisch diente) aufgestellt, und durch geeignete Anschläge dafür gesorgt, daß der Aufnahmegerät ohne langes Probieren immer in dieselbe Stellung zum

1) Die sich bildenden Feilspanketten rutschten auf der Papierunterlage bei leichter Erschütterung nach der Stelle größter Feldstärke zusammen.

Magneten gebracht werden konnte; die Stellung war derart, daß das unabgelenkte Strahlenbündel, d. h. eine durch Radiumkorn und Diaphragma gezogene Gerade immer längs des Bereiches maximaler Feldstärke verlief.

Da das Feld von seinem Maximum nach den nahe gelegenen Schenkelenden viel rascher abfiel, als nach innen hin, so wurde die Pollage so gewählt, daß die Strahlen nach innen hin abgelenkt wurden, daß also für verschieden stark abgelenkte Strahlen die Feldstärke in gleicher Höhe merklich dieselbe war.

4. *Das elektrische Feld* (Fig. 3). Zur Erzeugung des elektrischen Feldes diente eine Akkumulatorenbatterie von

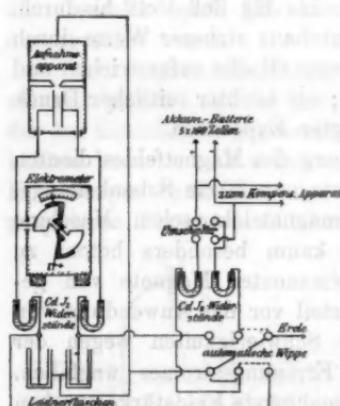


Fig. 3.

Bornhäuser in Ilmenau, aus 800 Zellen bestehend, die in Gruppen zu je 160 entweder parallel oder in Serie geschaltet werden konnten. Von der Batterie führte eine Leitung zu einem Kompensationsapparat, mittels dessen die Spannung der parallelgeschalteten Batterie vor und nach jeder Aufnahme mit der eines Westonnormalelementes verglichen werden konnte. Das Normalelement war in der Physikal.-Technischen Reichsanstalt geprüft. Die Leitung zum Apparat führte zunächst

durch einen Umschalter, dann durch zwei Jodkadmiumwiderstände zum Schutze gegen Kurzschlüsse und weiter zu einer automatischen Wippe. Diese Wippe hatte den Zweck, die verfügbare Spannung am Apparat auf den doppelten Wert der Batteriespannung zu bringen. Die beiden Schaltungen der Wippe sind aus der Figur erkenntlich. Die aus sehr leichtem Draht und einem dünnen Glaskrüppchen hergestellte Wippe war an der Pendelachse einer Schwarzwälder Uhr befestigt, so daß die Lage der Kontaktbügel jede halbe Sekunde wechselte. Durch die Wippe wurde von zwei Leidener Flaschen, deren äußere Belegungen geerdet waren, die eine jede Sekunde auf +, die

die andere auf  $-V$  aufgeladen, wenn  $V$  die Spannung der Batterie.<sup>1)</sup>

Von den Leidener Flaschen führten dann die Leitungen durch zwei weitere CdJ<sub>2</sub>-Widerstände zum Apparat. Ein mit eingeschaltetes Kelvinsches Elektrometer diente nur zur Kontrolle etwaiger Störungen, nicht aber zur eigentlichen Spannungsmessung. Die Hülle des Apparates war stets zur Erde abgeleitet.

5. *Die Luftpumpe.* Um unnötige diffuse Zerstreuung der Strahlen sowie Funkenübergang zwischen den dicht aneinander gedrängten Teilen des Apparates zu vermeiden, mußte das Ganze evakuiert werden; möglichste Schnelligkeit des Evakuierens bis zum Aufhören der Entladungsmöglichkeit durch den Apparat hindurch, wurde erreicht durch Kombination einer zweistufigen Fleussschen Ölpumpe zum Vorpumpen mit einer vom Verfasser konstruierten rotierenden Hg-Pumpe<sup>2)</sup> zum Auspumpen des Restes.

Im allgemeinen wurde etwa 25—30 Min. nach dem Beginn des Pumpens das Feld angelegt, nachdem Vorversuche gezeigt hatten, daß 10—15 Min. zum Auspumpen eben ausreichten. Die Hinzufügung einer Sicherheitsfrist war nötig, da etwaige innere Entladungen, wenn auch durch die Widerstände stark abgeschwächt und nur durch das Diaphragma die Platte beleuchtend, doch bei mehrmaliger Wiederholung deutliche Schleier und Streifen hervorriefen. Auch nach dem Anlegen des Feldes wurde noch weiter gepumpt, um die von den Wänden sich langsam lösenden Gasreste zu entfernen. Die Gesamtpumpdauer am Beginn des Versuches etwa betrug 1—2 Stunden. Während der 40—48 Stunden dauernden Aufnahme wurde meist nur noch einmal kurze Zeit nachgepumpt.

6. *Die photographischen Platten.* Die photographischen Platten wurden für mich von der Plattenfabrik Dr. Schleussner in Frankfurt aus bestem Spiegelglas gegossen und gleich in der Fabrik in runde Scheiben zerschnitten. Da bei meinen früheren Versuchen die Schicht sich im Vakuum infolge der scharfen Austrocknung stets vom Glase löste und zerriß, so

1) Über den Einfluß von Isolationsfehlern vgl. p. 516.

2) W. Kaufmann, Zeitschr. f. Instrumentenk. 25. p. 129. 1905.

hatte ich um besondere Sorgfalt bei der Herstellung gebeten, um die Schicht möglichst festhaftend zu machen. Der Erfolg entsprach leider nicht ganz den Erwartungen; die Schicht löste sich jetzt nicht mehr vom Glase ab, sondern riß beim Platzen ganze Splitter aus der Glasoberfläche mit heraus. Glücklicherweise geschah das Zerreissen meist nur in der Nähe des Randes, so daß nur selten einmal ein Riß durch die Kurve hindurchging. Über ein etwaiges Verziehen der photographischen Schicht und somit der Kurven vgl. w. u. p. 523.

Zur Entwicklung diente stark verdünnter Glycinentwickler.

7. *Strahlungsquelle.* Strahlungsquelle war ein Körnchen reines Radiumbromid von Buchler & Co. in Braunschweig. Es wurde in der kleinen Vertiefung in der Mitte der Bodenplatte befestigt, indem man eine Spur Wachs auf der angewärmten Platte zerfließen ließ, und dann rasch das Körnchen in seine richtige Lage brachte. Nach dem Erkalten haftete es fest, so daß der Apparat beliebig bewegt und geneigt werden konnte. Über die Größenverhältnisse und die Lage des Körnchens zum Apparat vgl. w. u. p. 507.

## Abteilung II.

### Meßmethoden und Messungsresultate.

Ich teile hier nur die Messungsresultate mit. Die Messungsprotokolle mit den abgelesenen Einzelzahlen sind, soweit sie für die Beurteilung der erreichten bez. erreichbaren Genauigkeit von Interesse, im Anhang mitgeteilt.

1. *Dimensionen des Aufnahmeapparates* (Fig. 4). Für die Berechnung der Kurven kommen folgende geometrische Größen in Betracht:

- a) Die Entfernung vom Boden des Apparates bis zum Diaphragma  $B'C$ .
- b) Die Entfernung vom Diaphragma bis zur photographischen Schicht  $A'B$ .
- c) Die Höhe der Kondensatorplatten  $DE$ .
- d) Der Abstand des oberen und unteren Randes der Kondensatorplatten vom Boden  $DB$  und  $EC$ .
- e) Der Abstand der Kondensatorplatten.
- f) Die Größe und Lage des Radiumkörnchens.
- g) Die Lage des Apparates bezüglich des Magnetfeldes.

Zur Ausmessung wurde teils ein Zeiss'scher Dickenmesser, teils ein Zeiss'scher Komparator nach Abbé verwandt. Der Dickenmesser war mir von der Firma Zeiss freundlichst zur Verfügung gestellt, wofür ich auch hier meinen besten Dank ausspreche.

Um die beiden unter a) und b) genannten Entfernungen zu messen, wurde die bereits erwähnte (p. 496) planparallele Glasplatte ( deren Umriß in der Figur gestrichelt angedeutet ist ) einmal auf die Säulen  $S$ , dann auf die Säulen  $S'$  gelegt und mit dem Dickenmesser die Entfernung der Oberfläche der Glasplatte vom Boden bestimmt. Da sich in den beiden Fällen die Oberfläche der Glasplatte in  $A$  und  $B$  (Fig. 3) befand, so ergaben die gefundenen Einstellungen die Entfernung  $A'-B'$  direkt gleich  $A-B$ .

Die Entfernung  $B'-C$  dagegen aus  $B-C$  durch Abzug der gemessenen Dicke der Platte.

Die Konstruktion des Apparates erlaubte es, wie leicht zu sehen, nicht, die Entfernungen direkt in der Mittellinie des Apparates zu messen. Andererseits konnte die Messung in der Mitte trotz der genauen Parallelität der oberen Bodenfläche  $c$  mit den Oberflächen der Säulen nicht durch einzelne Messungen am Rande ersetzt werden, weil die untere Grundfläche  $F$ , mit der der Apparat auf der Grundplatte des Dickenmessers aufstand, nicht genau parallel zu  $C$  war. Es wurde deshalb die Lage von  $C$  zunächst durch Messung an fünf Punkten  $C_1$  bis  $C_5$  bestimmt; ein nicht zugänglicher sechster Punkt  $C_6$  konnte wegen der genauen Ebenheit der Fläche leicht berechnet werden. Aus  $C_1$  bis  $C_5$  ergab sich die Höhe der Mitte  $C_0$  durch Rechnung.

In der Ebene  $B$  wurde sodann an drei Punkten  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$

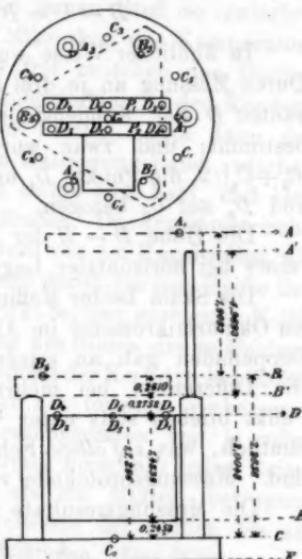


Fig. 4 (nat. Gr.).

gemessen, deren Projektionen auf  $C$  in der Mitte zwischen je zwei Punkten  $C$  lagen, so daß man erhielt:

$$B - C = B_1 - (C_1 + C_0)/2 \text{ etc.}$$

In ähnlicher Weise wurde auch in der Ebene  $A$  verfahren. Durch Messung an je drei Punkten wurde die Höhe der Oberkanten  $D$  der Kondensatorplatten über der Grundfläche bestimmt; und zwar wurden die Punkte  $D_4$  und  $D_2$  auf  $(C_2 + C_4)/2$ , die Punkte  $D_1$  und  $D_3$  auf  $(C_1 + C_3)/2$ , die Punkte  $D_5$  und  $D_6$  auf  $C_0$  bezogen.

Die Höhe  $D - E$  der Platten wurde mittels des Komparators bei horizontaler Lage des Apparates gemessen.

Die Skala beider Meßinstrumente war in  $1/8$  mm eingeteilt; ein Okularmikrometer im Ablesemikroskop mit verschiebbarem Doppelfaden gab an seiner Schraubentrommel die  $1/1000$  mm. Die Differenzen bei mehrmaliger Einstellung auf denselben Punkt blieben stets unter  $1/1000$ , so daß die folgenden Zahlen sämtlich, was zufällige Fehler anbetrifft, auf  $1/1000$  mm genau sind. Messungsprotokolle vgl. Anhang p. 543.

Die Messungsresultate sind:

$$A' - B = 1,9693 \text{ cm}$$

$$B' - C = 2,0048$$

$$D - C = 1,7296$$

$$D - E = 1,4838$$

Die Abstände  $B' - D$  und  $E - C$  ergeben sich leicht durch Subtraktion.

Weitaus die größten Schwierigkeiten bot eine genaue Messung des Abstandes der Platten.

Die Dicke der Quarzstückchen war bereits in der Zeisschen Fabrik, die die Verfertigung übernommen hatte, gemessen und zu  $0,1242 \text{ cm} \pm 0,0001$  gefunden worden.

Wenn nun auch das Einschieben der Quarzplättchen zwischen die Kondensatorplatten mit großer Vorsicht und Sauberkeit geschah, so schien es mir doch nicht unbedingt sicher, daß nicht kleine Staubteilchen mit hineingelangten und den Abstand vergrößerten. Es wurde deshalb der Versuch gemacht, den Abstand der Kondensatorplatten am fertig montierten Apparat zu messen. Leider gelang es nicht, diese Messung

mit der wünschenswerten Genauigkeit auszuführen. Ich versuchte so vorzugehen, daß ich ein kleines Glaskügelchen von etwa 1 mm Durchmesser an einem feinen Stiel so zwischen die Platten brachte, daß man im Mikroskop des Komparators sowohl das Kügelchen selbst, das frei zwischen den Platten schwiebte, als auch seine beiden Spiegelbilder in den Kondensatorplatten sah. Als Abstand der Platten sollte dann der Abstand zwischen den beiderseitigen Halbierungslinien zwischen Kugel und Spiegelbild dienen. Es zeigte sich bald, daß hier eigentümliche Kollimationsfehler auftreten. Der unsymmetrische Strahlengang im Mikroskop, das sowohl von der Kugel selbst, als auch von ihren Spiegelbildern stets nur durch die eine Hälfte des Objektivs Strahlen hindurchläßt, bewirkt bei dem geringsten Kollimationsfehler eine Seitenverschiebung des Bildes, die zu Fehlern Veranlassung gibt. Auch eine Anwendung der Kundtschen Kollimationsmethode<sup>1)</sup> konnte den Fehler nur teilweise verbessern.

Es wurden im ganzen 24 Messungsreihen von je zehn Einzeleinstellungen gemacht. Während innerhalb jeder Reihe die Abweichungen meist weniger als ein Mikron betragen, gingen die Abweichungen der Mittelwerte der Reihen bis zu einem Maximum von -13 bez. +7 Mikron. Das Mittel sämtlicher Reihen ergab sich zu:

$$0,1243 \text{ cm} \pm 0,0001 \text{ (mittl. Fehler).}$$

Ich zog es schließlich vor, den Zeiss'schen Wert 0,1242 den weiteren Rechnungen zugrunde zu legen. Genaue mikroskopische Betrachtung der Berührungsline zwischen Quarzplatte und Kondensatorplatte zeigte jedenfalls, daß der etwaige Zwischenraum nicht größer als einige Mikron sein konnte, daß also der Wert des Plattenabstandes und somit auch des elektrischen Feldes jedenfalls auf etwa 2 Promille sicher ist.

Die Größe und Lage des Radiumkernes zeigt Fig. 5 in Aufriß und Grundriß. Der Grundriß ist bloß nach Augenmaß gezeichnet, wobei der Rand der kreisförmigen Vertiefung, in der das Radium lag, als Maße diente. Die Lage der Ecken im Aufriß ist mittels Komparators gemessen. Wie man leicht sieht, ist das Körnchen ein etwas unregelmäßig gestalteter Splitter einer Kristallnadel, den man jedoch in genügender

1) A. Kundt, Wied. Ann. 34. 1888.

Annalen der Physik. IV. Folge. 19.

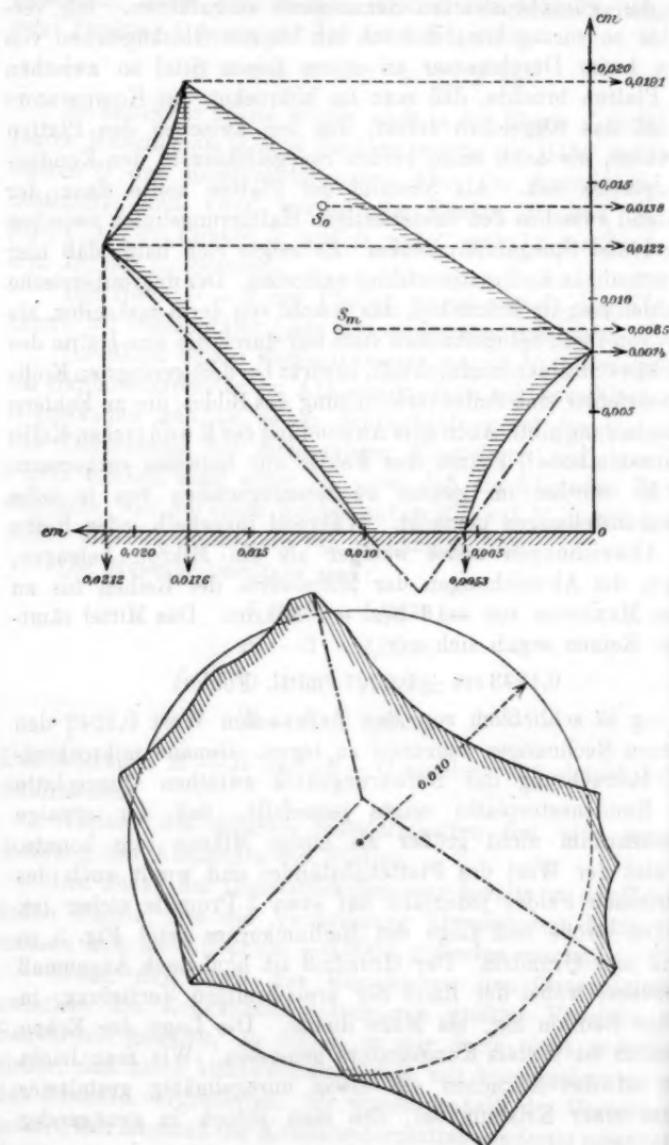


Fig. 5.

Annäherung als ein rechtwinkliges Parallelepiped betrachten kann. In der Grundrißzeichnung sind die nicht direkt sichtbaren Kanten strichpunktiert angedeutet. Ferner sind durch strichpunktierte Gerade im Aufriß die etwas krummen Kanten zu Geraden ergänzt.

Für dieses etwas idealisierte Kristallfragment wurde die Höhe des Schwerpunktes der gesamten Masse und der nach oben gewandten Oberfläche berechnet.

Nimmt man an, daß die  $\beta$ -Strahlen ohne merkliche Absorption von der ganzen Masse emittiert werden, dann käme als Ort der Strahlungsquelle für die Berechnung der Kurven der Massenschwerpunkt  $S_m$  in Betracht. Im Falle sehr starker Absorption der Strahlen in dem Kristall käme dagegen als strahlend nur die Oberfläche in Betracht und als Strahlungsquelle wäre der Schwerpunkt  $S_0$  der nach oben gewandten Oberfläche anzunehmen.

Für die Höhenlage der Schwerpunkte ergab sich:

$$S_m = 0,0085 \text{ cm}$$

$$S_0 = 0,0138$$

Als mittlere Lage für den Ausgangspunkt der Strahlen hat also jedenfalls ein Punkt zwischen diesen beiden Grenzen zu gelten. Nimmt man das arithmetische Mittel aus beiden:

$$x_0 = 0,0111 \text{ cm},$$

so ist der begangene Fehler jedenfalls kleiner als

$$(0,0138 - 0,0085)/2 = 0,0026 \text{ cm},$$

d. i.  $1/_{1000}$  der Bahn vom Radium bis zum Diaphragma.

Die Orientierung des Apparates im Magnetfeld ist durch die Entfernung von der Unterfläche des Ringes  $R'$  (Fig. 2) von der Grundfläche  $C$  bestimmt, die **2,113 cm** beträgt.

Die Parallelität der elektrischen und magnetischen Feldrichtung wurde folgendermaßen bestimmt und kontrolliert:

An der Außenwand der zylindrischen Hülle des Apparates war ein feiner senkrechter Strich angebracht, und an dem Glasgefäß in dazu passender Höhe eine Papierskala. Nachdem der Apparat ohne Deckel und Diaphragma eingesetzt war, wurde durch Drehen des Apparates die Ebene der Kondensatorplatten nach Augenmaß parallel einem längs der

der Mittellinie der Magnete ausgespannten Faden gemacht, und dann die Stellung des als Marke dienenden Striches an der Skala abgelesen. Bei den Versuchen wurde dann stets der Apparat so eingesetzt, daß die Marke an dieselbe Stelle der Skala kam. Die Stellung des Apparates konnte leicht auf etwa  $1^\circ$  genau konstant gehalten werden. Die Unsicherheit des Einvisierens der Kondensatorplatten beträgt etwa  $2^\circ$ . Bei einem maximalen Winkelfehler von  $2 + 1 = 3^\circ$  beträgt der relative Fehler in der dem elektrischen Felde parallelen Komponente des magnetischen Feldes erst  $1 - \cos 3^\circ = 0,0014$ . Erst bei  $5^\circ$  Winkelfehler würde der Fehler des magnetischen Feldes  $\frac{1}{2}$  Proz. betragen.

2. *Verlauf des magnetischen Feldes.* Die Messung des magnetischen Feldes zerfiel in zwei Teile, die relative und die absolute Feldmessung. Der relative Verlauf des Feldes längs der Strahlenbahn wurde mit einer kleinen Probespule bestimmt, die an beliebigen Punkten der Strahlenbahn um  $180^\circ$  gedreht werden konnte, und mit einem ballistischen Galvanometer verbunden war.

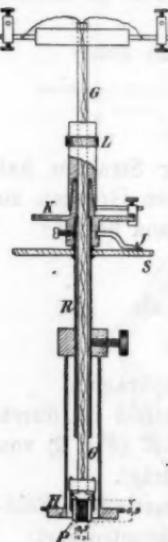


Fig. 6  
( $\frac{1}{2}$  nat. Gr.).

Fig. 6 zeigt den zur Verschiebung und Drehung der Probespule dienenden Apparat. Er besteht aus einer Hülle  $H$ , die mit ihrem unteren Ende genau auf den Ring  $S$  (Fig. 2) paßt, auf dem während der Exposition der Aufnahmeapparat ruht.

In dieser Hülle ist eine mit einer Millimeterteilung versehene Messingröhre  $R$  verschiebbar und in beliebiger Höhe feststellbar. Mit  $R$  ist an ihrem oberen Ende eine mit Teilkreis verschene Scheibe  $S$  fest verbunden und darüber drehbar und feststellbar ein Kopf  $K$ , auf dem wiederum eine Handhabe  $L$  drehbar aufgeschliffen ist. An  $K$  befindliche Anschläge begrenzen die mögliche Drehung von  $L$  auf genau  $180^\circ$ .

Eine mit  $L$  fest verbundene und einige Zentimeter nach oben herausragende Glasröhre  $G$  erstreckt sich durch den ganzen Apparat nach unten, und trägt an ihrem unteren

Ende die Probespule  $P$ , die aus 0,1 mm dickem Draht gewunden ist; die Zuleitungen gehen miteinander verseilt durch die Röhre zu zwei am oberen Ende befestigten Klemmschrauben.

Nachdem der Apparat eingesetzt war, wurde zuerst das richtige Azimut der Spulenwindungsebene — genau senkrecht zur Feldrichtung — durch Ausprobieren gefunden. Man bestimmte zu diesem Zwecke für verschiedene Stellungen des mit  $K$  verbundenen Index  $J$  auf der Teilscheibe  $S$  den beim Drehen der Spule um  $180^\circ$  entstehenden ballistischen Ausschlag, und fand durch Rechnung diejenige Stellung, für die der Ausschlag ein Maximum. Die genaue Parallelverschiebung des Apparates bei Einstellung in verschiedene Höhen wurde dann dadurch bewirkt, daß ein Senkel dicht neben dem Teilkreis aufgehängt wurde, und jedesmal der Teilkreis sorgfältig in gleiche Stellung bezüglich des Senkelfadens gebracht wurde.

In jeder Höhenlage der Spule wurden drei bis acht Einzelmessungen gemacht, bei denen die Ausschläge des Galvanometers höchstens um  $\frac{1}{2}$  Skt. vom Mittelwert abwichen. Da die Ausschläge etwa 450 Skt. betrugen, so ist relative Genauigkeit ca. 2 Promille. Die Höhen sind bei der Messung zunächst durch die Skala am Apparat bestimmt. Eine einfache Umrechnung gestattet die Beziehung auf den Punkt  $C_0$  des Aufnahmeapparates als Nullpunkt.

Folgende Tabelle enthält den relativen Feldverlauf von dem eben genannten Nullpunkt aus gerechnet:

Tabelle I.  
Relatives Magnetfeld.

$x_{\text{em}}$	$H_{\text{rel.}}$	$x_{\text{em}}$	$H_{\text{rel.}}$	$x_{\text{em}}$	$H_{\text{rel.}}$
-1,0	484,5	1,0	467,5	3,0	459,0
-0,5	450,5	1,5	468,0	3,5	455,0
0,0	460,0	2,0	466,0	4,0	450,5
0,5	466,0	2,5	462,5	4,5	444,0

Man sieht aus der Tabelle, daß das Feld in dem für die Versuche in Betracht kommenden Bereich, d. h. von  $x = 0$  bis  $x = 4$  sehr homogen ist. Die extremen Werte 488 und 450,5 unterscheiden sich nur um 4 Proz., die maximale Abweichung vom Mittelwert beträgt also etwa 2 Proz.

Es wurden ferner einige Messungen gemacht, bei denen der Apparat aus der Normalstellung um 5 mm nach innen, d. h. in Richtung der magnetischen Ablenkung der Strahlen verschoben war. Es ergab sich für  $x = 0$  eine Abnahme von 0,5 und für  $x = 3$  eine Zunahme von 1 Skt. Das Feld längs der abgelenkten Strahlenbahn ist also von dem Felde längs der unabgelenkten Bahn höchstens stellenweise um 2 Promille verschieden.

Die *absolute Feldmessung* wurde mittels der in Fig. 7 schematisch dargestellten Anordnung ausgeführt. Es sollte

der Apparat mit der Probespule, ohne an seinen Zu-  
leitungen etwas zu ändern, aus dem Felde des Magneten in das Feld einer genau ausgemessenen stromdurchflossenen Drahtspule gebracht werden.

Es stand mir zu diesem Zwecke ein Erdinduktor von Hartmann und Braun zur Verfügung, dessen Wicklung aus 100 sehr sorgfältig auf einem Mahagonirahmen gewundenen Windungen bestand.

An vier um je einen rechten

Winkel voneinander entfernten Stellen des Umfangs waren Aussparungen in dem Rahmen angebracht, so daß man auch den inneren Durchmesser der Windungsfläche messen konnte.

Die für die Messung in Betracht kommenden Dimensionen der Spule sind in der Figur angegeben; sie wurden mittels eines einfachen Maßstabes gemessen, der durch Vergleich mit einem Normalmaßstab als auf etwa  $\frac{1}{3000}$  richtig befunden war.

Es war erwünscht, um unabhängig von der genauen Proportionalität der ballistischen Ausschläge mit der Feldstärke (die übrigens ziemlich genau vorhanden war) zu sein, das Feld der Spule annähernd gleich dem Felde des Magneten zu machen. Da jedoch die nur etwa  $\frac{3}{4}$  mm dicken Drähte

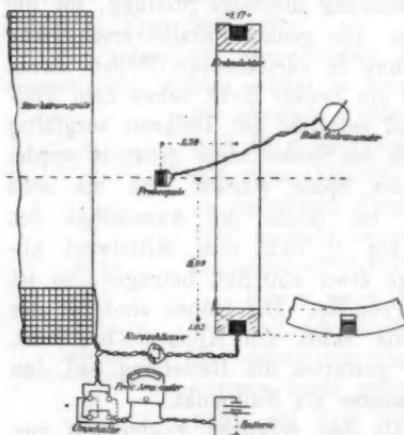


Fig. 7.

des Erdinduktors den hierzu nötigen Strom von etwa 34 Amp. nicht lange genug aushielten, um einen Umkehrpunkt der langsam schwingenden Galvanometerspule zu bestimmen, so wurde zunächst das Feld des Erdinduktors gegen eine dicke-drähtige Starkstromspule kompensiert. Es wurde derselbe Strom durch Erdinduktor und Starkstromspule hintereinander geschickt, und die gegenseitige Stellung so einreguliert, daß in der Probespule beim Schließen des Stromes kein merkbarer Induktionsstoß entstand. Da hierzu der Strom nur etwa 1—2 Sekunden geschlossen werden brauchte, so konnte die Bestimmung mit Strömen von etwa 25 Amp. ohne Gefahr für den Erdinduktor ausgeführt werden. Dann erst wurde durch einen Schlüssel der Erdinduktor kurz geschlossen und der Ausschlag beobachtet, der beim Kommutieren des Stromes der Starkstromspule im Galvanometer entstand. Sämtliche Leitungen waren, wie in der Figur angedeutet, sorgfältig verseilt, um fremde Felder auszuschließen. Zur Strommessung diente ein Präzisionsampèremeter von Siemens & Halske, dessen Angaben mittels eines Kompensationsapparates auf ein Normalohm und ein Westonsches Normalelement bezogen wurden. Der gefundene Skalenfehler des Instrumentes war nicht ganz unbeträchtlich. Der Temperaturkoeffizient des Instrumentes wurde berücksichtigt.

Unmittelbar nach der Messung des ballistischen Ausschlages beim Drehen der Probespule im Felde des Magneten bei einem willkürlich gewählten  $x$  wurde die Messung im Felde der Stromspule ausgeführt, wobei die Stromstärke so gewählt wurde, daß das Feld der Spule dem Felde des Magneten möglichst nahekam.

Der Abstand der Skala des ballistischen Galvanometers bei diesen Versuchen war aus versuchstechnischen Gründen viel geringer als bei den relativen Feldmessungen, so daß die Ausschläge mit den früheren nicht vergleichbar sind.

Als Mittel aus elf Einzelmessungen ergab sich für  $x = 1,0$  der ballistische Ausschlag im Felde des Magneten (auf  $\infty$  kleine Bögen reduziert):

$$n = 95,3 \pm 0,04 \text{ (mittl. Fehler)} \quad [= 95,3 \cdot (1 \pm 0,4/1000)].$$

Im Felde der Stromspule ergaben sechs Messungen als

Verhältnis von Ausschlag  $N$  zur Stromstärke  $J$  im Durchschnitt:

$$N/J = 2,786 \pm 0,007 \text{ (mittl. Fehler)}$$

$$[= 2,787 \cdot (1 \pm 2/1000)].$$

Daß der relative mittlere Fehler bei diesen Messungen soviel größer ist, als bei den Messungen im Felde des Magneten, liegt an der Veränderlichkeit des Stromes. Die stärksten Ströme, die ich mit der Akkumulatorenbatterie des Institutes in meinem Arbeitszimmer erhalten konnte, betrugen etwa 33 Amp., womit ein Ausschlag von rund 91 Skt. erhalten wurde. Die bei dieser Belastung eintretende Erhitzung der Leitungen genügte, um ein ziemlich rasches Abfallen des Stromes zu bewirken. Es wurde deshalb so verfahren, daß ich selbst im Augenblicke des Kommutierens nur den Galvanometerausschlag beobachtete, während ein Hilfsbeobachter<sup>1)</sup> auf Kommando unmittelbar vor und nach dem Kommutieren das Ampèremeter ablas. Das Mittel aus beiden Ablesungen wurde dann als kommutierter Strom betrachtet.

Um ein Feld gleich dem des Magneten im Punkte  $x = 1$  zu erzeugen, ist also ein Spulenstrom, bez. ein Strom im Erdinduktor nötig von der Stärke:

$$J = 95,3/2,787 = 34,19 \text{ Amp.} \pm 0,08$$

$$[= 34,19 \cdot (1 \pm 2,3/1000)].$$

Es sei  $r$  der mittlere Windungsradius des Erdinduktors,  $a$  der Abstand der Mitte der Probespule von der mittleren Windungsebene des Induktors,  $n$  seine Windungszahl, dann ist die Feldstärke eines den Erdinduktor durchfließenden Stromes  $J$  am Orte der Probespule gleich:

$$H = \frac{0,2 \pi n J r^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \cdot 2)$$

1) Hr. cand. math. Hofmann war so freundlich, mich bei diesen Messungen zu unterstützen.

2) Die Korrektion wegen des endlichen Windungsquerschnittes des Erdinduktors beträgt nur  $-1/2400$ ; die Korrektion wegen der Inhomogenität des Erdinduktorfeldes im Querschnitt der Probespule etwa  $+1/800$ , so daß im ganzen die Gleichung für  $H$  höchstens um  $1/1200$  falsch ist vgl. F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. p. 359. Leipzig 1901).

Nun ist (vgl. die in Fig. 7 eingeschriebenen Maßzahlen):

$$\begin{aligned} r &= 9,96 + 1,03/2 = 10,47 \pm 0,02, \\ a &= 5,38 \pm 0,02, \\ n &= 100 \\ J &= 34,19 \pm 0,08. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$H = 144,0 \text{ Gauss} \pm 0,9 \quad [= 144,0 \cdot (1 \pm 6,3/1000)].$$

Die relative Feldmessung hatte für  $x = 1$  ergeben:  $H_{\text{rel.}} = 467,5$ . Das absolute Feld wird also aus dem relativen erhalten durch Multiplikation mit  $144,0/467,5 = 0,3080$ .

Somit ergibt sich folgende Tabelle für den Verlauf von  $H$ :

Tabelle II.

Absolute Werte des magnetischen Feldes.			
$x$	$H_{\text{beob.}}$	$H_{\text{ber.}}$	Diff.
0,0	141,7	141,7	0
0,5	143,5	143,2	+ 0,3
1,0	144,0	144,0	0
1,5	144,2	144,0	+ 0,2
2,0	143,5	143,5	0
2,5	142,5	142,6	- 0,1
3,0	141,4	141,4	0
3,5	140,2	140,2	0
4,0	138,8	138,9	- 0,1

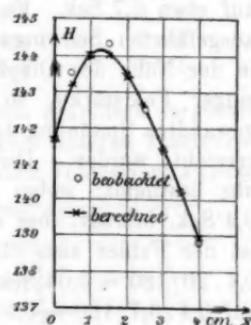


Fig. 8.

Die Werte unter  $H_{\text{ber.}}$  sind nach der empirischen Gleichung:

$$H = 141,7 + 4,1 \cdot x - 2,0 \cdot x^2 + 0,2 \cdot x^3$$

erhalten. Diese Gleichung wird weiter unten zur Ermittlung des „Feldintegrals“ (vgl. p. 525 und Anhang p. 543) benutzt. Fig. 8 stellt den Feldverlauf graphisch dar.

**3. Verlauf des elektrischen Feldes.** Um den relativen Verlauf des elektrischen Feldes zu bestimmen, wurde aus ver-silberten Spiegelglasplatten eine Kopie der oberen Hälfte des Kondensators und des darüber befindlichen Diaphragmas in 29-facher Vergrößerung hergestellt. Oberhalb des Diaphragmas, das in der Vergrößerung einen Durchmesser von etwa 6 mm hatte, befand sich eine Messingröhre, an deren oberen Ende ein Torsionskopf angebracht war. Der Torsionskopf trug, in

senkrechter Richtung verschiebbar, eine mit Millimeterskala versehene Messingstange, von deren unterem Ende an einem etwa 20 cm langen, 0,05 mm dicken Platindraht ein kleines Spiegelchen herabhängt. Das aus reinem Silber bestehende Spiegelchen hatte 5 mm Durchmesser und besaß unter dem alleinigen Einfluß der Torsionskraft des Platindrahtes eine Schwingungsdauer von etwa 10 Sek. Wurden dagegen, wenn die Spiegelebene in der Ruhelage senkrecht zu den Kondensatorplatten stand, die Platten auf + 320 und - 320 Volt geladen, während der Spiegel zur Erde abgeleitet war, so trat infolge der Influenzwirkung auf den Spiegel noch eine Richtkraft des elektrischen Feldes hinzu, und die Schwingungsdauer sank in dem homogenen Teil des Feldes zwischen den Platten auf etwa 6,7 Sek. Es wurden stets die während etwa 3 Min. ausgeführten Schwingungen gezählt. Wenn sich der Spiegel in der Nähe des Diaphragmas befand, also an Orten sehr geringer Feldstärke, so konnte durch Verdoppelung der angewandten Spannung doch noch eine genügend kräftige Wirkung erreicht werden. Die Zeiten wurden mittels einer Stoppuhr bestimmt; wobei der Fehler der Zeitbestimmung zirka 0,4 Sek. beträgt; bei einer Beobachtungsdauer von 180 Sek. ist der Fehler also für die Schwingungsdauer ohne Feld auf  $0,4 \cdot 20 / 180 = 0,04$  Sek. für die Schwingungsdauer im Feld auf  $0,4 \cdot 6,7 / 180 = 0,015$  Sek. zu schätzen.

Ist  $t_0$  die Schwingungsdauer ohne,  $t$  dieselbe mit Feld,  $F$  die angelegte Spannung,  $k$  eine Apparatzkonstante, so ist das Feld  $F$  für die Spannungsdifferenz 1 der Platten gegeben durch:

$$F^2 = \frac{k}{V^2} (1/t^2 - 1/t_0^2).$$

Da im allgemeinen das zweite Klammerglied klein gegen das erste ist, so kann man den relativen Fehler von  $F$  gleich dem relativen Fehler von  $t$  setzen, also gleich  $0,015/6,7 = 2,2$  Promille. Zwischen den Platten bis dicht an den Rand ergeben Theorie und Experiment in Übereinstimmung praktisch konstantes Feld. In diesem Bereich kann man den Absolutwert des Feldes aus Plattenabstand und der während der Aufnahmedauer fortlaufend kontrollierten mittleren Potentialdifferenz berechnen. Als Fehlerquelle kommt hier nur der etwaige Fehler in der

Bestimmung des Plattenabstandes in Betracht, als etwa 2 Pro-mille. Für den variablen Teil des Feldes dagegen sind auch noch die Fehler der Schwingungsdauer maßgebend, die jedoch ihr Vorzeichen unregelmäßig wechseln, während der Abstands-fehler einen konstanten Wert hat.

Die folgende Tabelle enthält die beobachteten Feldstärken in relativem Maß; das Feld im homogenen Teile ist gleich Eins gesetzt. Abszissen sind die Entfernung von der Bodenfläche  $C$ .

Tabelle III.

## Relativer Verlauf des elektrischen Feldes.

$x$	$F_{\text{rel.}}$	$x$	$F_{\text{rel.}}$
1,493	0,997	1,805	0,375
1,562	1,003	1,840	0,247
1,665	0,994	1,874	0,170
1,735	0,796	1,909	0,104
1,770	0,557	1,943	0,050

In Fig. 9 ist der Verlauf des Feldes graphisch dargestellt. Der Teil des Feldes von  $x = 0$  bis zum unteren Plattenrand ist nicht direkt gemessen, sondern aus dem Feldverlauf zwischen

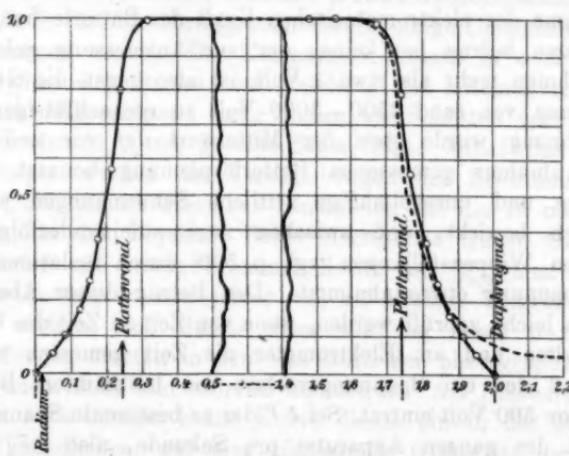


Fig. 9.

oberem Plattenrand und Diaphragma dadurch annähernd be-stimmt, daß die gemessene Kurve in der Abszissenrichtung im Verhältnis 246/275 (d. i. das Verhältnis der Abstände zwischen

unterem Plattenrand und Boden einerseits und oberem Plattenrand und Diaphragma andererseits) zusammengeschoben wurde. Die weiter unten (p. 545) folgende Berechnung des Feldintegrals zeigt, daß der durch dieses Verfahren etwa verursachte Fehler sehr gering ist.

Zum Vergleich ist noch durch die gestrichelte Kurve der Feldverlauf dargestellt, wie er sich nach Maxwell<sup>1)</sup> ergibt, wenn die Platten unendlich dünn und keine anderen Leiter in der Nähe sind. Man sieht, daß die endliche Dicke der Platten den Abfall am Rande etwas verlangsamt, daß dieser Wirkung aber in weiterer Entfernung vom Rande die Wirkung des zur Erde abgeleiteten Diaphragmas entgegenarbeitet, das einen raschen Abfall des Feldes auf Null hervorbringt.

Den absoluten Wert des elektrischen Feldes im eigentlichen Apparate für eine Potentialdifferenz  $V$  erhält man durch Multiplikation der obigen Zahlen mit:  $V/0,1242$  [ $0,1242$  = Plattenabstand].

Der Wert von  $V$  während der Aufnahme ist nicht völlig konstant. Eine geringe Änderung röhrt von der allmählichen Abnahme der elektromotorischen Kraft der Batterie her. Die Abnahme betrug bei keiner der zur Ausmessung gelangten Aufnahmen mehr als etwa 1 Volt, ist also gegen die Gesamtspannung von rund 2500–3000 Volt zu vernachlässigen; zur Berechnung wurde stets der Mittelwert der vor und nach der Aufnahme gemessenen Batteriespannung benutzt. Viel größere und unregelmäßige zeitliche Schwankungen werden dadurch bewirkt, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichen Wippenstellungen (vgl. p. 500) durch Isolationsfehler die Spannung etwas abnimmt. Der Betrag dieser Abnahme konnte leicht geprüft werden, wenn von Zeit zu Zeit die Wippe angehalten und am Elektrometer die Zeit gemessen wurde, während der ein Spannungsverlust von bestimmtem Betrag, etwa von 500 Volt eintrat. Sei  $\delta V$  der so bestimmte Spannungsverlust des ganzen Apparates pro Sekunde, also  $\delta V/2$  der Verlust jeder Hälfte für sich. Sei ferner  $V/2$  die Batteriespannung, also  $V$  die Spannungsdifferenz der Platten, dann ist

---

1) J. C. Maxwell, El. u. Magn., Deutsche Ausgabe. 1. p. 321.

die mittlere Spannung jeder Platte zwischen zwei gleichen Stellungen der Wippe:

$$V/2 - \delta V/4,$$

also die mittlere Apparatspannung:

$$V - \delta V/2.$$

Es ist somit jederzeit von der mittels Kompensationsapparat gemessenen Batteriespannung der Verlust während einer halben Sekunde abzuziehen.

Die Verluste schwankten zeitlich sehr stark; bei trockner Witterung waren sie gänzlich zu vernachlässigen; an gewitterschwülen Tagen, die in Bonn im Sommer sehr häufig sind, stiegen sie bisweilen bis auf 21 Volt, d. h. bis auf etwa 1 Proz. der Spannung. Da jedoch derartige Verluste nur stundenweise vorkamen, so sind doch selbst bei nur roher Bestimmung der Verluste die zeitlichen Mittelwerte der Spannung auf etwa 1 Promille sicher.

*5. Ausmessung der Platten.* Zur Ausmessung der gewonnenen Platten diente der bereits erwähnte Abbé'sche Komparator, an dem jedoch für den vorliegenden Zweck einige Umänderungen vorgenommen waren. Der Komparator besteht in seiner ursprünglichen Gestalt aus zwei gleichen, fest miteinander verbundenen Mikroskopen, unter denen ein Schlitten verschiebar, der eine in  $\frac{1}{5}$  mm geteilte Skala trägt. Mittels des einen Mikroskopes werden die Verschiebungen des Schlittens abgelesen, das andere dient zur Einstellung auf die zu messenden Punkte des Objekts. Beide Mikroskope tragen Okularmikrometer mit einem Trommelteilwert von  $\frac{1}{1000}$  mm. Das Objektmikroskop wurde seiner viel zu starken Vergrößerung wegen entfernt und durch eines von nur etwa 6-facher Vergrößerung ersetzt, in dem das Korn der photographischen Platte noch nicht sehr störend hervortrat. Als Einstellmarke auf die etwa 0,3 mm breite Kurve diente ein in der Brennebene befindlicher, auf eine planparallele Glasplatte geritzter Kreis von 0,2 mm Durchmesser. Der Schlittenmaßstab des Komparators sollte zur Messung der elektrischen Ablenkung ( $y$ ) dienen. Um die Platte auch in Richtung der magnetischen Ablenkung ( $z$ ) verschieben und die Verschiebung messen zu

können, war auf dem Komparatorschlitten ein zweiter Schlitten<sup>1)</sup>, rechtwinklig zu ersterem, befestigt, der als Träger der Platte diente. Dieser Schlitten war durch eine Schraube von  $\frac{1}{3}$  mm Ganghöhe verschiebbar; die Schraubendrehungen wurden jedoch, weil sich die Schraube als ziemlich minderwertig erwies, nicht direkt zur Messung benutzt, sondern es wurde auf die Platte, aus deren Schicht ein Streifen parallel der  $z$ -Richtung ausgekratzt war, ein in  $\frac{1}{10}$  mm eingeteiltes Glasmikrometer geteilt. Die Verschiebungen dieses Mikrometers wurden direkt an der kreisförmigen Okularmarke mit einem Fehler von etwa  $\frac{2}{1000}$  mm abgelesen. Bloß bei der Einstellung auf den Nullpunkt der Kurve, d. h. auf den unabgelenkten<sup>2)</sup> Fußpunkt der  $\alpha$ - und  $\gamma$ -Strahlen, dessen  $z$ -Koordinate ja nicht gerade mit einem Teilstrich des Okularmikrometers koinzidierte, wurde die Trommel der Schlittenschraube zur Interpolation benutzt.

Die Teilung des Komparatorschlittens konnte ohne weitere Prüfung für den vorliegenden Zweck als absolut genau angesehen werden. Die Teilung des Glasmikrometers wurde mit der Schlittenteilung verglichen und gefunden, daß nominelle 10 mm des Mikrometers einen wahren Wert von 9,975 mm hatten. Die abgelesenen  $z$ -Werte sind also um 2,5 Promille zu verkleinern. In den weiter unten folgenden Tabellen sind diese Korrekturen jedoch nicht angebracht, sondern die direkt abgelesenen  $z$ -Werte angegeben; die Korrektion ist vielmehr, um unnötige Rechenarbeit zu ersparen, erst an den endgültigen Konstanten angebracht (vgl. p. 533).

Der Gang der Messungen gestaltet sich nunmehr wie folgt: Zuerst wird die Platte unter dem durch Federn aufgepreßten Glasmikrometer so orientiert, daß die beiden Kurvenäste symmetrisch zur  $z$ -Richtung liegen, was daran erkannt

1) Aus Teilen eines Babinetischen Kompensators hergestellt.

2) Eine magnetische Ablenkung der  $\alpha$ -Strahlen ist in dem schwachen Magnettfeld nicht zu erwarten. Eine elektrische Ablenkung macht sich in einer kleinen Verbreiterung des ohne Feld kreisrund erscheinenden Flecks bemerkbar. Ich habe diese Verbreiterung bereits auf meinen ersten Platten im Jahre 1901 bemerkt, damals aber fälschlicherweise einer Verwitterung und Verbreiterung der Strahlenquelle zugeschrieben. Erst die Entdeckung der Ablenkbartigkeit der  $\alpha$ -Strahlen durch Rutherford ließ mich die wahre Ursache erkennen.

wird, daß die am Komparatorschlitten abgelesenen  $y$ -Koordinaten ( $y_1$  und  $y_2$ ) zweier zusammengehöriger Punkte beider Kurvenäste gleich weit nach beiden Seiten von der  $y$ -Koordinate des Kurvennullpunktes ( $y_0$ ) abstehen. Dann wird die  $z$ -Koordinate des Nullpunktes ( $z_0$ ) bestimmt; mittlerer Fehler des Nullpunktes:  $\pm 1/1000$  mm.

Hierauf wird der Abstand  $2y$  der beiden Kurvenäste für willkürlich gewählte, im allgemeinen in Intervallen von je 0,5 mm wachsende  $z$ -Werte bestimmt. Die untere Grenze des ausgemessenen Intervalles hängt allein von der Sichtbarkeitsgrenze der Kurve ab. Die obere Grenze war bei den stärkeren Feldern dadurch bedingt, daß die Strahlen schließlich die Kondensatorplatten trafen. Deshalb mußte, um das ganze magnetische Spektrum zu erhalten, eine Platte (Nr. 15) bei möglichst schwachem elektrischem Felde exponiert werden. Auf jeden einzelnen Kurvenpunkt wurde je zehnmal eingestellt und zwar immer abwechselnd zweimal auf  $y_1$ , dann zweimal auf  $y_2$ , je einmal von links, einmal von rechts her. Durch diese Vorsicht in Verbindung mit möglichst raschem Einstellen wurde vermieden, daß irgendwelche Punktchen und Flecken auf der Platte unbewußtermaßen als Marken dienten. Mittlerer Einstellungsfehler des Kurvenpunktes  $\pm 4/1000$  mm.

Die Messungsresultate der zur Ausmessung gelangten fünf Platten sind in folgender Tabelle enthalten.<sup>1)</sup> Dabei bedeutet  $z_b$  die „beobachtete“  $z$ -Koordinate vom Kurvennullpunkt aus gerechnet,  $y_b$  die zugehörige  $y$ -Koordinate, d. h. den halben Abstand beider Kurvenäste. Die Indizes dienen zur Unterscheidung von nachher folgenden „reduzierten“ Werten.

Tabelle IV.  
Beobachtete Ablenkungen.

Platte Nr.	$z_b$ (cm)	$y_b$ (cm)	Mittlere Spannung am Kondensator (Volt)
10	{ 0,1771 0,2271 0,2771 0,3271	{ 0,0357 0,0486 0,0639 0,0797	2805

1) Die Platten 11, 13 u. 15 sind an weit auseinanderliegenden Zeiten zweimal gemessen, wobei sich ausgezeichnete Übereinstimmung innerhalb der wahrscheinlichen Fehler ergab. Ein Messungsprotokoll vgl. Anhang p. 542.

Tabelle IV (Fortsetzung).

Platte Nr.	$x_b$ (cm)	$y_b$ (cm)	Mittlere Spannung am Kondensator (Volt)
11 (Erste Messung)	0,2000	0,0420	2603
	0,2500	0,0546	
	0,3000	0,0695	
	0,3500	0,0866	
	0,4000	0,1083	
	0,4500	0,1300	
	0,5000	0,1540	
11 (Zweite Messung)	0,1903	0,0384	2603
	0,2403	0,0512	
	0,2903	0,0655	
	0,3403	0,0831	
	0,3903	0,1036	
	0,4403	0,1302	
	0,1353	0,0271	
12	0,1853	0,0395	2601
	0,2353	0,0529	
	0,2853	0,0688	
	0,3353	0,0863	
	0,3853	0,1051	
	0,4353	0,1263	
	0,4853	0,1493	
13 (Erste Messung)	0,1254	0,0288	3250
	0,2054	0,0511	
	0,2554	0,0688	
	0,3054	0,0894	
	0,3554	0,1123	
	0,4054	0,1392	
	0,4554	0,1664	
13 (Zweite Messung)	0,1456	0,0340	3250
	0,1956	0,0490	
	0,2456	0,0655	
	0,2956	0,0845	
	0,3456	0,1081	
	0,3956	0,1341	
	0,4456	0,1616	
15 (Erste Messung)	0,2290	0,0813	1631,5 <sup>1)</sup>
	0,3290	0,0527	
	0,4290	0,0767	
	0,5290	0,1064	
	0,5790	0,1236	
	0,2487	0,0350	
	0,3487	0,0568	
15 (Zweite Messung)	0,4487	0,0814	1631,5 <sup>1)</sup>
	0,5487	0,1119	

1) Bei Platte 15 waren die beiden Enden der in der Mitte geerdeten Batterie direkt, ohne Zwischenschaltung der Wippe, an den Apparat gelegt.

Für die weitere Verwertung der Resultate ist es am bestemsten, nicht jede Kurve für sich zu betrachten, sondern alle Kurven zu einer einzigen zusammenzuziehen, indem man die Ordinaten auf eine willkürlich gewählte elektrische Spannung reduziert. Die folgende Tabelle enthält die auf eine Spannung von 2500 Volt reduzierten Ablenkungen  $y_r$ , wobei

$$y_r = y_b \cdot \frac{2500}{V}.$$

Die Punkte sind nach wachsendem  $z_b$  geordnet.

Tabelle V.

Auf gleiches elektrisches Feld reduzierte Ablenkungen.

Laufende Nr.	Platte Nr.	$z_b$	$y_r$	$p$
1	18	0,1254	0,0222	1,3
2	12	0,1353	0,0261	1
3	13	0,1456	0,0262	1,3
4	10	0,1771	0,0343	1
5	12	0,1853	0,0380	1
6	11	0,1903	0,0369	1
7	13	0,1956	0,0377	1,3
8	11	0,2000	0,0403	1
9	13	0,2054	0,0393	1,3
10	10	0,2271	0,0466	1
11	15	0,2290	0,0480	0,65
12	12	0,2353	0,0509	1
13	11	0,2403	0,0492	1
14	18	0,2456	0,0504	1,3
15	15	0,2487	0,0536	0,65
16	11	0,2500	0,0524	1
17	18	0,2554	0,0529	1,3
18	10	0,2771	0,0613	1
19	12	0,2853	0,0662	1
20	11	0,2903	0,0629	1
21	13	0,2956	0,0650	1,3
22	11	0,3000	0,0668	1
23	13	0,3054	0,0688	1,3
24	10	0,3271	0,0765	1
25	15	0,3290	0,0807	0,65
26	12	0,3353	0,0830	1
27	11	0,3403	0,0798	1
28	13	0,3456	0,0832	1,3
29	15	0,3487	0,0870	0,65
30	11	0,3500	0,0832	1
31	13	0,3554	0,0863	1,3

Tabelle V (Fortsetzung).

Laufende Nr.	Platte Nr.	$x_s$	$y_r$	$p$
82	10	0,8771	0,0989	1
83	12	0,8858	0,1011	1
84	11	0,8903	0,0995	1
85	13	0,8956	0,1031	1,3
86	11	0,4000	0,1040	1
87	13	0,4054	0,1071	1,3
88	15	0,4290	0,1175	0,65
89	12	0,4858	0,1214	1
40	11	0,4408	0,1251	1
41	13	0,4456	0,1243	1,3
42	15	0,4487	0,1247	0,65
43	11	0,4500	0,1249	1
44	13	0,4554	0,1280	1,3
45	12	0,4858	0,1438	1
46	11	0,5000	0,1479	1
47	15	0,5290	0,1690	0,65
48	15	0,5487	0,1714	0,65
49	15	0,5790	0,1894	0,65

Über die Bedeutung der „Gewichte“  $p$  in der letzten Kolumne und der Einteilung der Punkte in die durch Querstriche angedeuteten Gruppen vgl. w. u.

Fig. 10, Taf. IV stellt den Verlauf der „auf gleiches Feld reduzierten Kurve“ graphisch dar. Man sieht, daß die Abweichungen vom stetigen Verlauf bedeutend größer sind, als nach dem mittleren Fehler von  $2-4 \mu$  der einzelnen Punkte zu erwarten; es kommen Abweichungen bis zu  $30 \mu$  vor. Es müssen also noch Quellen für systematische Fehler vorhanden sein, die durch Wiederholung der Beobachtungen nicht zu beseitigen sind. Ähnliche Abweichungen bei meinen früheren Versuchen hatten die Vermutung hervorgerufen, daß eine Verzerrung der Gelatineschicht während der Entwicklung der Platten die Ursache sei. Zur Aufklärung dieses Punktes wurde auf jede Platte unmittelbar nach ihrer Herausnahme aus dem Apparat eine Schablone mit sechs Löchern aufgelegt und mit einer Glühlampe etwa  $\frac{1}{2}$  Sek. aus 1 m Entfernung belichtet. Es entstanden so auf jeder Platte sechs schwarze Punkte, deren Abstände nach Entwicklung und Trocknung der Platte auf dem Komparator gemessen und mit den gemessenen Ab-

ständen der Schablonenlöcher verglichen werden konnte. Die Löcher lagen auf einem Kreise von etwa 14 mm Durchmesser, also außerhalb des Bereiches der Kurve. Die Messungen ergaben tatsächlich eine Verzerrung der Schicht, und zwar hauptsächlich dort, wo infolge des bereits erwähnten Abplatzens der Schicht die Marken sich in der Nähe des Randes befanden. Die gefundenen Verzerrungen wiesen stets auf eine Vergrößerung der Schicht hin und betragen im Maximum etwa  $\frac{1}{3}$  Proz. Da sie jedoch in diesem Betrage nur in der Nähe des Randes auftraten, so war anzunehmen, daß sie im Bereich der gemessenen Kurven viel kleiner waren und vernachlässigt werden konnten. In keinem Falle konnten sie die großen individuellen Abweichungen namentlich der Platten 15 und 12 erklären.<sup>1)</sup> Es scheint mir eher wahrscheinlich, daß die stets sehr starke Verschleierung der Platten (durch diffuse Strahlung, induzierte Aktivität des Apparates etc.) die mit dem Fortschreiten der Versuche immer mehr zunahm, hier die Fehlerquelle ist. Wenn nämlich an irgend einer Stelle der Schleier in seiner Intensität räumlich variiert, so wird dadurch die Mittellinie der ca. 0,3 mm breiten Kurve nach der Seite größerer Dunkelheit hin verschoben; dieselbe Wirkung haben natürlich die stets vorhandenen kleinen Flecken und Fehler auf den Platten.

Es schien deshalb das beste, eine *Ausgleichung* der Kurve dadurch vorzunehmen, daß immer eine Gruppe von Punkten, die möglichst den verschiedenen Platten angehörten, zu einem ausgeglichenen Punkte vereinigt wurde. Diese Gruppen sind in obiger Tabelle durch Querstriche, in der Kurve (Taf. IV, Fig. 10) durch Klammern zusammengefaßt.

Bei der sehr geringen Krümmung der Kurve und der engen Lage der Gruppen konnte die Ausgleichung einfach so vorgenommen werden, daß von jeder Gruppe der Schwerpunkt genommen wurde. Hierbei wurde jedoch den verschiedenen Punkten verschiedenes Gewicht beigelegt, und zwar wurde das Gewicht ungefähr proportional der wirklich gemessenen elektrischen Ablenkung, also proportional der mittleren Spannung des Kondensators während der Aufnahme gesetzt.

1) Eine probeweise ausgeführte Reduktion der Kurven mit Berücksichtigung der Schichtverzerrung vergrößerte die Abweichungen.

Demgemäß erhielten die Punkte der Platten 10, 11, 12 das Gewicht  $p = 1$ , die Punkte der Platte 13 erhielten das Gewicht  $p = 1,3$  und die Punkte der Platte 15 erhielten  $p = 0,65$ .

Die ausgeglichenen Punkte  $\bar{z}$  und  $\bar{y}$  erhält man dann aus jeder Gruppe nach der Gleichung:

$$\bar{z} = \Sigma(z_b \cdot p) / \Sigma p,$$

$$\bar{y} = \Sigma(y_b \cdot p) / \Sigma p.$$

Die Gewichte der ausgeglichenen Punkte sind dann proportional  $\Sigma p$ .

Folgende Tabelle enthält die so erhaltenen neun Punkte der ausgeglichenen Kurve. Die Gewichte sind auf einfache Zahlen abgerundet.

Tabelle VI.

Ausgeglichene Kurve.

$\bar{z}$	$\bar{y}$	$p$
0,1354	0,0247	0,5
0,1930	0,0378	1
0,2423	0,0506	1
0,2930	0,0653	1
0,3423	0,0825	1
0,3930	0,1025	1
0,4446	0,1242	1
0,4926	0,1457	0,25
0,5522	0,1746	0,25

Diese ausgeglichene Kurve dient allen weiteren Berechnungen als Grundlage; ihre Punkte sind in Taf. IV, Fig. 10 durch Doppelkreise angedeutet.

Abteilung III.

1. Allgemeine Theorie der Bahnkurve.

Wir berechnen die Bahn des Elektrons zunächst unter der Annahme, daß die Ablenkungen unendlich klein gegen die Apparatdimensionen sind. Da dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist, so müssen die beobachteten Ablenkungen „auf unendlich kleine Ablenkungen reduziert“ werden.

Im Falle unendlich kleiner Ablenkungen besteht Proportionalität zwischen den Ablenkungen und den Kräften und die gleichzeitigen elektrischen und magnetischen Ablenkungen

sind voneinander unabhängig; für endliche Ablenkungen gilt dies nicht mehr.

Es seien:

$x_0, 0, 0$  die Koordinaten der Strahlenquelle,

$x_1, 0, 0$  " " des Diaphragmas,

$x_2, y', z'$  " " eines Kurvenpunktes auf der Platte.

I. *Magnetische Ablenkung.* Ist  $q$  die Bahngeschwindigkeit des Elektrons,  $e$  seine Ladung in elektromagnetischem Maß,  $\mu$  seine Masse,  $\rho$  der Krümmungsradius der Bahn, so gilt:

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{e}{\mu q} \cdot H \quad [H \text{ sei parallel } y],$$

sind die Ablenkungen sehr klein, d. h.  $\rho$  sehr groß, so ist

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 z}{dx^2},$$

also

$$(1a) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{e}{\mu q} H,$$

somit unter Berücksichtigung der Bedingung, daß  $z = 0$  für  $x = x_0$  und  $x = x_1$ ,

$$(2) \quad z' = \frac{e}{\mu q} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{x_0}^x H dx - \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{x_0}^x H dx \right\} = \frac{e}{\mu q} \cdot M.$$

Die Größe  $M$  werde im folgenden als das

„magnetische Feldintegral“ bezeichnet.

II. *Elektrische Ablenkung.* Es ist

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{e}{\mu} F,$$

oder, da

$$\frac{dx}{dt} = q, \text{ also } dt = \frac{dx}{q} \text{ ist,}$$

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{e}{\mu q^2} \cdot F.$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung, daß  $y = 0$  für  $x = x_0$  und  $x = x_1$ ,

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_1} = \frac{e}{\mu q^2} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} F dx - \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{x_0}^x F dx \right\}.$$

Da jenseits des Diaphragmas das elektrische Feld Null ist, so folgt:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}' = (x_2 - x_1) \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x_1} = \frac{\varepsilon}{\mu q^2} \\ \cdot (x_2 - x_1) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} F dx - \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{x_0}^x F dx \right\} = \frac{\varepsilon}{\mu q^2} \cdot \mathbf{E}. \end{array} \right.$$

$E$  heiße das „elektrische Feldintegral“. (Über die Berechnung der Feldintegrale vgl. Anhang p. 543.)

Falls die Ablenkungen endlich sind, gelten die Gleichungen (2) und (4) nicht mehr ohne weiteres.

Um eine Reduktion der wirklichen magnetischen Ablenkung  $\bar{z}$  auf unendlich kleine Ablenkung, d. h. auf Proportionalität mit  $M/q$  zu gewinnen, betrachten wir zunächst die Bahn als Kreisbogen, was für die Korrektionsglieder wegen der nur sehr geringen Inhomogenität des Feldes erlaubt ist.

Setzen wir zur Abkürzung  $(x_1 - x_0)/2 = m$  und  $x_2 - x_1 = n$ , so ist zunächst:

$$\varrho^2 = (m + n)^2 + (\sqrt{\varrho^2 - m^2} - \bar{z})^2,$$

woraus:

$$(5) \quad \sqrt{\varrho^2 - m^2} = \frac{n^2 + 2mn + \bar{z}^2}{2\bar{z}};$$

für sehr kleine  $\bar{z}$  wird  $\varrho$  sehr groß und  $\varrho = n^2 + 2mn/2\bar{z}$ ; dann ist  $\bar{z}$  proportional  $1/\varrho$ , d. h. proportional  $\varepsilon/\mu q \cdot H$ .

Man führe nun eine Größe  $z'$  ein derart, daß allgemein:

$$(6) \quad \varrho = \frac{n^2 + 2mn}{2z'} \quad \text{oder} \quad z' = \frac{n^2 + 2mn}{2\varrho},$$

dann gilt für  $z'$  die Gleichung (2), denn es ist, wenn man zunächst  $\varrho$  aus (6) in (1) einsetzt, und nach  $z'$  auflöst:

$$z' = \frac{\varepsilon}{\mu q} \cdot \left( H \cdot \frac{n^2 + 2mn}{2} \right);$$

der Faktor von  $\varepsilon/\mu q$  ist aber der Wert, den  $M$  für ein homogenes Magnetfeld annimmt. Wenn das Magnetfeld nahezu homogen ist, dann wird jedenfalls Gleichung (2) auch noch mit großer Annäherung erfüllt sein, wenn man das beobachtete  $\bar{z}$  ersetzt durch ein  $z'$ , das nach Gleichung (6) mit einem der

Ablenkung  $\bar{z}$  entsprechenden mittleren Krümmungsradius berechnet ist. Durch Einsetzen von (6) in (5) erhält man:

$$\sqrt{\frac{(n^2 + 2mn)^2}{4x'^2} - m^2} = \frac{n^2 + 2mn + \bar{z}^2}{2\bar{z}}.$$

Wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(7) \quad \frac{n^2 + 2mn + 2m^2}{(n^2 + 2mn)^2} = x \quad \text{und} \quad (8) \quad \frac{1}{(n^2 + 2mn)^2} = \lambda,$$

so wird:

$$(9) \quad z'^2 = \bar{z}^2 \cdot \frac{1}{1 + 2x\bar{z}^2 + \lambda\bar{z}^4}.$$

Der größte Wert von  $\bar{z}$  ist 0,55; es läßt sich leicht zeigen, daß man selbst für diesen größten  $\bar{z}$ -Wert nur einen Fehler von 1 Promille begeht, wenn man setzt:

$$(10) \quad x = \bar{z}(1 - x\bar{z}^2) = \bar{z}(1 - 0,16\bar{z}^2).$$

Wenn zu der magnetischen noch eine gleichzeitige elektrische Ablenkung hinzukommt, so findet die Bewegung nicht mehr in der  $zz$ -Ebene statt und für die magnetische Ablenkung kommt nicht mehr die Bahngeschwindigkeit  $q$ , sondern nur ihre Komponente  $q_x$  in Betracht, die in die  $zz$ -Ebene fällt.

Nun ist

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2,$$

wenn  $q_y$  die Komponente in Richtung der elektrischen Kraft; die maximale elektrische Ablenkung beträgt ca. 0,17 cm. Diese tritt ein längs eines Weges  $s_2$  gleich dem Bogen vom Diaphragma bis zur Platte; also jedenfalls  $s_2 > n$  oder  $s_2 > 2$  cm.

Es ist also

$$q_y < q_x \cdot \frac{0,17}{2} \quad \text{oder} \quad q_y < 0,085 q_x.$$

Somit:

$$q^2 - q_x^2 < q_x^2 \cdot 0,007 \quad \text{oder} \quad q - q_x < \frac{q}{300}.$$

Es wird also im ungünstigsten Falle ein Fehler von 3 Promille begangen, wenn man  $q_x$  durch  $q$  ersetzt.

Für die elektrische Ablenkung würde Gleichung (4) — abgesehen von der Vernachlässigung der durch elektrostatische Arbeit zwischen den Kondensatorplatten eintretenden Geschwindigkeitsvermehrung und der nicht genauen Transversalität der Ablenkung — strenge gelten, wenn nicht die gleichzeitige magnetische Ablenkung vorhanden wäre. Diese bewirkt, daß

nicht  $dt = dx/q$ , sondern  $dt = ds/q_s$  ist, wo  $ds$  ein Bogen-element der Bahnprojektion auf die  $yz$ -Ebene. Die Bahnkrümmung durch das Magnetfeld bewirkt einerseits ein längeres Verweilen im elektrischen Feld, somit eine Vergrößerung der Neigung, mit der das Elektron aus dem Diaphragma hervortritt, andererseits einen längeren Weg jenseits des Diaphragmas, so daß an Stelle des Faktors  $(x_2 - x_1)$  in Gleichung (4) der Faktor  $s_2$  tritt, wo  $s_2$  die Wegprojektion vom Diaphragma bis zur Platte.

Um die Änderung des Verweilens im elektrischen Felde, also die Vermehrung des zweiten Faktors von  $E$  zu bestimmen, genügt es, das Feld als konstant zwischen den Platten, als Null außerhalb der Platten zu betrachten. Ist  $h$  die Höhe der Platten,  $s_1$  die halbe Länge der zwischen den Platten liegenden Bahnprojektion auf die  $yz$ -Ebene,  $s_2$  die Länge der Bahnprojektion vom Diaphragma bis zur Platte, so würde man im Falle eines zwischen den Platten homogenen Feldes erhalten:

$$\bar{y} = \frac{s}{\mu q^2} \cdot F s_1 s_2,$$

für  $\infty$  kleine Ablenkungen dagegen wird

$$(11) \quad y' = \frac{s}{\mu q^2} F \cdot \frac{h}{2} (x_2 - x_1) = \bar{y} \frac{h(x_2 - x_1)}{2 s_1 s_2} = \bar{y} \frac{h n}{2 s_1 s_2}.$$

Wir nehmen wieder an, daß auch für den Fall des inhomogenen Feldes die Reduktionsformel (11) Gültigkeit habe. Dies ist um so mehr berechtigt, als, wie die numerische Berechnung ergibt,  $h/2 s_1$  sich im äußersten Falle nur im  $1/1000$  von 1 unterscheidet; der größte Teil der Korrektion führt von dem Faktor  $(x_2 - x_1)/s_2$  her.

Es ist:

$$s_1 = \varrho \cdot \arcsin \frac{h}{2 \varrho},$$

$$s_2 = 2 \varrho \cdot \arcsin \frac{\sqrt{n^2 + \bar{z}^2}}{2 \varrho}.$$

Durch Entwicklung der  $\arcsin$ -Funktion in eine Reihe, Einsetzen des Wertes von  $\varrho$  aus Gleichung (6) und Fortlassung aller höheren Potenzen von  $z$  erhält man schließlich:

$$(12) \quad y' = \bar{y} \left\{ 1 - \bar{z}^2 \left[ \frac{1}{2 n^2} + \frac{1}{6} \frac{h^2 + n^2}{(n^2 + 2 m n)^2} \right] \right\} = \bar{y} \cdot [1 - 0,145 \bar{z}^2].$$

Die nach Gleichungen (10) und (12) auf unendlich kleine Ablenkungen reduzierten Koordinaten sind dann ohne weiteres in die Gleichungen (2) und (4) einsetzbar. Man erhält aus (10) und (12) folgende Werte für die „reduzierte Kurve“.

Tabelle VII.

Auf unendlich kleine Ablenkung reduzierte Kurve.

$x'$	$y'$	$p$
0,1350	0,0246	0,5
0,1919	0,0376	1
0,2400	0,0502	1
0,2890	0,0645	1
0,3359	0,0811	1
0,3832	0,1001	1
0,4305	0,1205	1
0,4735	0,1405	0,25
0,5252	0,1667	0,25

Taf. IV, Fig. 11 stellt die reduzierte Kurve graphisch dar.

Aus den Gleichungen (2) und (4) erhält man die *Gleichung der reduzierten Kurve*, wenn man den Zusammenhang zwischen der Masse  $\mu$  und der Geschwindigkeit  $q$  kennt.<sup>1)</sup>

Ist  $\mu_0$  der Wert der elektromagnetischen transversalen Masse des Elektrons für  $q=0$ , und ist  $\beta=q/c$ , wo  $c$  die Lichtgeschwindigkeit, so ist allgemein:

$$(13) \quad \mu = \mu_0 \cdot \Phi(\beta).$$

Dabei hängt die Gestalt der Funktion  $\Phi(\beta)$  von den über die Konstitution des Elektrons gemachten Grundannahmen ab und ist später bei Besprechung der einzelnen Theorien zu bestimmen.

Durch Einsetzen in (2) und (4) erhält man

$$(14) \quad z' = \frac{e}{\mu_0} \frac{M}{c} \cdot \frac{1}{\beta \cdot \Phi(\beta)}, \quad 2)$$

$$(15) \quad y' = \frac{e}{\mu_0} \cdot \frac{E}{c^2} \cdot \frac{1}{\beta^2 \Phi(\beta)}.$$

1) Genau genommen müßte hier  $\mu$  als Funktion von  $q_s$ , an Stelle von  $q$ , betrachtet werden. Bei gleicher magnetischer Ablenkung ist die elektrische Ablenkung der Spannung an den Kondensatorplatten nicht genau proportional, da gleichbleibendem  $q_s$  bei größerer elektrischer Ablenkung größeres  $q$  als auch größeres  $\mu$  entspricht. Die Ablenkungen wachsen also etwas langsamer als das Feldintegral.

2) Die in den folgenden Gleichungen dargelegte Berechnungsmethode ist von Hrn. C. Runge (Gött. Nachr. 1903, Heft 5) angegeben.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(16) \quad \frac{s}{\mu_0} \cdot \frac{M}{c} = \frac{1}{A} \quad \text{und} \quad \frac{s}{\mu_0} \cdot \frac{E}{c^2} = B.$$

$$(17) \quad \frac{1}{\beta \cdot \Phi(\beta)} = u \quad \text{und} \quad \frac{1}{\beta^2 \cdot \Phi(\beta)} = v = f(u),$$

so kann man schreiben:

$$(18) \quad y' = B \cdot v = B \cdot f(Az').$$

Ist also eine Hilfstabelle (vgl. Anhang p. 552) berechnet, die zu einer möglichst engen Reihe von  $u$ -Werten die zugehörigen  $v$  angibt, so lässt sich, wenn  $A$  und  $B$  bekannt sind, zu jedem  $z'$  nach Gleichung (18) das zugehörige  $y'$  berechnen und mit dem beobachteten vergleichen. Es gelingt leicht, für die beiden „Kurvenkonstanten“  $A$  und  $B$  angenäherte Werte zu finden, und die dann noch anzubringenden Verbesserungen nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen. Die so bestimmten Kurvenkonstanten kann man dann mit den durch Gleichung (16) definierten „Apparatzkonstanten“ vergleichen, d. h. denjenigen Werten für  $A$  und  $B$ , die sich aus den gemessenen Feldintegralen und dem von Kathodenstrahlbeobachtungen bekannten Wert von  $s/\mu_0$  ergeben. Über die zweckmäßigste Art der Vergleichung vgl. w. u.

## 2. Vergleichung mit den Theorien von Abraham, Lorentz und Bucherer.

Die die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit ausdrückende Funktion  $\Phi(\beta)$  hat nach den in der Überschrift dieses Paragraphen genannten und in der Einleitung näher präzisierten drei Theorien folgenden Wert:

$$\text{I. (Abraham)} \quad \Phi(\beta) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{1+\beta^2}{2\beta} \cdot \lg \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right)$$

$$\text{II. (Lorentz)} \quad \Phi(\beta) = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

$$\text{III. (Bucherer)} \quad \Phi(\beta) = (1 - \beta^2)^{-1/3}.$$

Die Einstein'sche Theorie führt zu derselben Formel wie die Lorentzsche, wenn man sich an die von Hrn. Einstein (l. c.) angegebenen Bewegungsgleichungen hält; die von Hrn. Einstein gegebene etwas abweichende Definition der Masse für einen mit dem Elektron mitbewegten Beobachter entspricht nicht

den bei meinen Beobachtungen vorliegenden Verhältnissen; die Abweichung seiner Gleichung für die Masse des Elektrons von der Lorentzschen ist deshalb auch nur eine scheinbare.

In den Fällen I. und III. ergeben sich aus den Gleichungen (14) bis (16) folgende Beziehungen zwischen den Apparatzkonstanten, den Kurvenkonstanten und  $\epsilon/\mu_0$ :

$$(19) \quad A \cdot B = E/Mc = \beta \cdot y'/z',$$

$$(20) \quad \epsilon/\mu_0 = c/A M = B c^2/E = c \sqrt{B c/A M E}.$$

Im Falle II. ist eine Trennung der Variablen möglich und man erhält als Gleichung der reduzierten Kurve:

$$(21) \quad y'^2 = C^2 z'^2 + D^2 z'^4,$$

wobei:

$$(22) \quad C = E/Mc$$

und

$$(23) \quad \epsilon/\mu_0 = c C/M D = c^2 C^2/E D = \frac{c C}{D} \cdot \sqrt{c C/M E}.$$

Die Gleichungen (19) und (22) gestatten die Vergleichung von  $AB$  bez.  $C$  mit einer direkt aus der Versuchsanordnung berechneten Größe. Sie sind also ein direktes Prüfungsmitel für die betreffende Theorie. Die Gleichungen (20) und (23) enthalten noch den Kathodenstrahlwert  $\epsilon/\mu_0$ , über dessen Betrag noch keine vollkommene Einigkeit zu herrschen scheint. Er ergibt sich hier auf zwei verschiedenen Wegen, unter Berücksichtigung entweder des elektrischen oder des magnetischen Feldintegrals allein. Beide Werte weichen voneinander um so mehr ab, je weniger die Gleichungen (19) und (22) sich erfüllt zeigen. Für eine Vergleichung mit den an Kathodenstrahlen beobachteten Werten erscheint es am besten, die etwaigen Beobachtungsfehler auf magnetisches und elektrisches Feldintegral gleichmäßig zu verteilen und das geometrische Mittel aus beiden Werten zu nehmen; dies ist die Bedeutung der dritten Ausdrücke für  $\epsilon/\mu_0$  in Gleichungen (20) und (23).

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt folgende Werte der Kurvenkonstanten:

I. Nach Abraham:  $A = 2,169 \cdot 4/3 \quad B = 0,08355 \cdot 8/4$

II. „ Lorentz:  $C^2 = 0,02839 \quad D^2 = 0,2672$

III. „ Bucherer:  $A = 2,9337 \quad B = 0,06284.$

Die folgende Tabelle enthält die Resultate der Berechnung:

Tabelle VIII.

Vergleichung der beobachteten mit der berechneten Kurve.

$x'$	$y'_{\text{beob.}}$	$p$	$y'_{\text{ber.}}$			$\delta$			$\beta$		
			I	II	III	I	II	III	I	II	III
0,1350	0,0246	0,5	0,0251	0,0246	0,0254	- 5	0	- 8	0,974	0,924	0,971
0,1919	0,0376	1	0,0377	0,0375	0,0379	- 1	+ 1	- 3	0,922	0,875	0,919
0,2400	0,0502	1	0,0502	0,0502	0,0502	0	0	0	0,867	0,875	0,864
0,2890	0,0545	1	0,0649	0,0651	0,0647	- 4	- 6	- 2	0,807	0,823	0,805
0,3359	0,0811	1	0,0811	0,0813	0,0808	0	- 2	+ 3	0,752	0,713	0,750
0,3882	0,1001	1	0,0995	0,0997	0,0992	+ 6	+ 4	+ 9	0,697	0,661	0,695
0,4305	0,1205	1	0,1201	0,1202	0,1200	+ 4	+ 3	+ 5	0,649	0,616	0,647
0,4735	0,1405	0,25	0,1408	0,1405	0,1409	- 3	0	- 4	0,610	0,579	0,608
0,5252	0,1667	0,25	0,1682	0,1678	0,1687	- 15	- 11	- 20	0,566	0,527	0,564

Aus der Tabelle geht zunächst hervor, daß man aus der Gestalt der Kurven allein, ohne Berücksichtigung der Absolutwerte der Konstanten keine Entscheidung zugunsten der einen oder anderen Theorie treffen kann.<sup>1)</sup> Der mittlere Fehler der einzelnen Kurvenpunkte beträgt nämlich:

Für I: 5 Mikron (Abraham)

„ II: 5 „ (Lorentz)

„ III: 7 „ (Bucherer).

Da aber bei der theoretischen Berechnung der Kurve mehrfach Glieder vom relativen Betrage von 1—3 Promille vernachlässigt sind, so ist der Betrag der Vernachlässigung für die mittleren und größeren  $y'$ -Werte bereits von der Ordnung des gefundenen mittleren Fehlers. Ich habe gleichwohl auf eine genauere Berechnung verzichtet, da wegen der großen individuellen Abweichungen der einzelnen Platten voneinander tatsächlich die Fortlassung einer Platte, oder Einführung anderen Gewichtes genügt, um Verschiebungen der Kurve von einigen Mikron zu bewirken.

Man kann also als Resultat der obigen Berechnung zunächst nur sagen, daß alle drei Theorien die relative Gestalt

1) Eine graphische Darstellung der berechneten Kurven vom Maßstabe der Taf. IV, Fig. 11 ist zwecklos, da die Differenzen zu klein sein würden, um mit bloßem Auge gesehen werden zu können.

der Kurve gleich gut darstellen. Aus den Werten für  $\beta$  er sieht man jedoch, daß die Lorentzsche Theorie ganz andere Geschwindigkeiten verlangt, als die Bucherer'sche und Abrahamsche. Für diese beiden sind die Geschwindigkeiten fast identisch und was noch merkwürdiger ist: Die Funktion  $\Phi(\beta)$  stimmt, wie man sich leicht überzeugen kann, für beide innerhalb des hier vorliegenden Geschwindigkeitsintervalls numerisch mit einer Abweichung von höchstens 2 Proz. überein.

Die Entscheidung hängt somit nur von den Gleichungen (19) und (22) bez. (20) und (23) ab.

Die im Anhang p. 543 u. ff. berechneten Werte der Feldintegrale sind:

$$E = 315 \cdot 10^{10} \text{ Elektromagn. Einh. (bei 2500 Volt P. D.)}, \\ M = 557,1.$$

Somit ist:

$$E/Mc = 0,1884.$$

Dagegen ergibt die Berechnung mittels der Kurvenkonstanten (unter Berücksichtigung der Korrektion wegen des auf p. 518 erwähnten Fehlers der z-Skala):

	Differenz in Proz.
I. nach Abraham: $A B = 0,1817$	- 3,5
II. „ Lorentz: $C = 0,1689$	- 10,4
III. „ Bucherer: $A B = 0,1881$	- 2,8

Die Werte für  $\epsilon/\mu_0$  sind:

a) Für Kathodenstrahlen: <sup>1)</sup>	$1,878 \cdot 10^7$ .	Differenz in Proz.
b) Für $\beta$ -Strahlen:		
nach Abraham    1,858    1,788    1,823		- 2,9
„ Lorentz        1,751    1,569    1,660		- 11,6
„ Bucherer      1,833    1,780    1,808		- 3,7

Endlich kann man noch eine Vergleichung der verschiedenen Theorien dadurch ausführen, daß man die Konstanten  $A$  und  $B$ , bez.  $C$  und  $D$  selbst aus den Gleichungen (16) mittels der gemessenen Werte von  $M$  und  $E$  und des Kathoden-

1) Aus dem von R. Simon (Ann. d. Phys. 59, p. 589. 1899) ge fundenen Werte  $1,865 \cdot 10^7$  für  $\infty$  kleine Geschwindigkeiten korrigiert. Vgl. Anhang p. 548.

Da jenseits des Diaphragmas das elektrische Feld Null ist, so folgt:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = (x_2 - x_1) \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x_1} = \frac{s}{\mu q^2} \\ \cdot (x_2 - x_1) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} F dx - \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{x_0}^x F dx \right\} = \frac{s}{\mu q^2} \cdot E. \end{array} \right.$$

*E* heiße das „elektrische Feldintegral“. (Über die Berechnung der Feldintegrale vgl. Anhang p. 543.)

Falls die Ablenkungen endlich sind, gelten die Gleichungen (2) und (4) nicht mehr ohne weiteres.

Um eine Reduktion der wirklichen magnetischen Ablenkung  $\bar{z}$  auf unendlich kleine Ablenkung, d. h. auf Proportionalität mit  $M/q$  zu gewinnen, betrachten wir zunächst die Bahn als Kreisbogen, was für die Korrektionsglieder wegen der nur sehr geringen Inhomogenität des Feldes erlaubt ist.

Setzen wir zur Abkürzung  $(x_1 - x_0)/2 = m$  und  $x_2 - x_1 = n$ , so ist zunächst:

$$\rho^2 = (m + n)^2 + (\sqrt{\rho^2 - m^2} - \bar{z})^2,$$

woraus:

$$(5) \quad \sqrt{\rho^2 - m^2} = \frac{n^2 + 2mn + \bar{z}^2}{2\bar{z}};$$

für sehr kleine  $\bar{z}$  wird  $\rho$  sehr groß und  $\rho = n^2 + 2mn/2\bar{z}$ ; dann ist  $\bar{z}$  proportional  $1/\rho$ , d. h. proportional  $s/\mu q \cdot H$ .

Man führe nun eine Größe  $z'$  ein derart, daß allgemein:

$$(6) \quad \rho = \frac{n^2 + 2mn}{2z'} \quad \text{oder} \quad z' = \frac{n^2 + 2mn}{2\rho},$$

dann gilt für  $z'$  die Gleichung (2), denn es ist, wenn man zunächst  $\rho$  aus (6) in (1) einsetzt, und nach  $z'$  auflöst:

$$z' = \frac{s}{\mu q} \cdot \left( H \cdot \frac{n^2 + 2mn}{2} \right);$$

der Faktor von  $s/\mu q$  ist aber der Wert, den  $M$  für ein homogenes Magnetfeld annimmt. Wenn das Magnetfeld nahezu homogen ist, dann wird jedenfalls Gleichung (2) auch noch mit großer Annäherung erfüllt sein, wenn man das beobachtete  $\bar{z}$  ersetzt durch ein  $z'$ , das nach Gleichung (6) mit einem der

Ablenkung  $\bar{z}$  entsprechenden mittleren Krümmungsradius berechnet ist. Durch Einsetzen von (6) in (5) erhält man:

$$\sqrt{\frac{(n^2 + 2m n)^2}{4\pi^2} - m^2} = \frac{n^2 + 2m n + \bar{z}^2}{2\bar{z}}$$

Wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(7) \quad \frac{n^2 + 2m n + 2m^2}{(n^2 + 2m n)^2} = x \quad \text{und} \quad (8) \quad \frac{1}{(n^2 + 2m n)^2} = \lambda,$$

so wird:

$$(9) \quad \bar{z}^2 = \bar{x}^2 \cdot \frac{1}{1 + 2x\bar{z}^2 + 1\bar{x}^2}$$

Der größte Wert von  $\bar{z}$  ist 0,55; es läßt sich leicht zeigen, daß man selbst für diesen größten  $\bar{z}$ -Wert nur einen Fehler von 1 Promille begeht, wenn man setzt:

$$(10) \quad x = \bar{z}(1 - x\bar{z}^2) = \bar{z}(1 - 0,16\bar{z}^2).$$

Wenn zu der magnetischen noch eine gleichzeitige elektrische Ablenkung hinzukommt, so findet die Bewegung nicht mehr in der  $zz$ -Ebene statt und für die magnetische Ablenkung kommt nicht mehr die Bahngeschwindigkeit  $q$ , sondern nur ihre Komponente  $q_z$  in Betracht, die in die  $zz$ -Ebene fällt.

Nun ist

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2,$$

wenn  $q_y$  die Komponente in Richtung der elektrischen Kraft; die maximale elektrische Ablenkung beträgt ca. 0,17 cm. Diese tritt ein längs eines Weges  $s_z$  gleich dem Bogen vom Diaphragma bis zur Platte; also jedenfalls  $s_z > n$  oder  $s_z > 2$  cm.

Es ist also

$$q_y < q_x \cdot \frac{0,17}{2} \quad \text{oder} \quad q_y < 0,085 q_x.$$

Somit:

$$q^2 - q_z^2 < q_x^2 \cdot 0,007 \quad \text{oder} \quad q - q_z < \frac{q}{300}.$$

Es wird also im ungünstigsten Falle ein Fehler von 3 Promille begangen, wenn man  $q_z$  durch  $q$  ersetzt.

Für die elektrische Ablenkung würde Gleichung (4) — abgesehen von der Vernachlässigung der durch elektrostatische Arbeit zwischen den Kondensatorplatten eintretenden Geschwindigkeitsvermehrung und der nicht genauen Transversalität der Ablenkung — streng gelten, wenn nicht die gleichzeitige magnetische Ablenkung vorhanden wäre. Diese bewirkt, daß

nicht  $dt = dx/q$ , sondern  $dt = ds/q_s$  ist, wo  $ds$  ein Bogen-element der Bahnprojektion auf die  $yz$ -Ebene. Die Bahnkrümmung durch das Magnetfeld bewirkt einerseits ein längeres Verweilen im elektrischen Feld, somit eine Vergrößerung der Neigung, mit der das Elektron aus dem Diaphragma hervortritt, andererseits einen längeren Weg jenseits des Diaphragmas, so daß an Stelle des Faktors  $(x_2 - x_1)$  in Gleichung (4) der Faktor  $s_2$  tritt, wo  $s_2$  die Wegprojektion vom Diaphragma bis zur Platte.

Um die Änderung des Verweilens im elektrischen Felde, also die Vermehrung des zweiten Faktors von  $E$  zu bestimmen, genügt es, das Feld als konstant zwischen den Platten, als Null außerhalb der Platten zu betrachten. Ist  $h$  die Höhe der Platten,  $s_1$  die halbe Länge der zwischen den Platten liegenden Bahnprojektion auf die  $yz$ -Ebene,  $s_2$  die Länge der Bahnprojektion vom Diaphragma bis zur Platte, so würde man im Falle eines zwischen den Platten homogenen Feldes erhalten:

$$\bar{y} = \frac{s}{\mu q^2} \cdot F s_1 s_2,$$

für  $\infty$  kleine Ablenkungen dagegen wird

$$(11) \quad y' = \frac{s}{\mu q^2} F \cdot \frac{h}{2} (x_2 - x_1) = \bar{y} \frac{h(x_2 - x_1)}{2 s_1 s_2} = \bar{y} \frac{h n}{2 s_1 s_2}.$$

Wir nehmen wieder an, daß auch für den Fall des inhomogenen Feldes die Reduktionsformel (11) Gültigkeit habe. Dies ist um so mehr berechtigt, als, wie die numerische Berechnung ergibt,  $h/2 s_1$  sich im äußersten Falle nur im  $1/1000$  von 1 unterscheidet; der größte Teil der Korrektion führt von dem Faktor  $(x_2 - x_1)/s_2$  her.

Es ist:

$$s_1 = \varrho \cdot \arcsin \frac{h}{2 \varrho},$$

$$s_2 = 2 \varrho \cdot \arcsin \frac{\sqrt{n^2 + \bar{z}^2}}{2 \varrho}.$$

Durch Entwicklung der  $\arcsin$ -Funktion in eine Reihe, Einsetzen des Wertes von  $\varrho$  aus Gleichung (6) und Fortlassung aller höheren Potenzen von  $z$  erhält man schließlich:

$$(12) \quad y' = \bar{y} \left\{ 1 - \bar{z}^2 \left[ \frac{1}{2 n^2} + \frac{1}{6} \frac{h^2 + n^2}{(n^2 + 2 m n)^2} \right] \right\} = \bar{y} \cdot \{ 1 - 0,145 \bar{z}^2 \}.$$

Die nach Gleichungen (10) und (12) auf unendlich kleine Ablenkungen reduzierten Koordinaten sind dann ohne weiteres in die Gleichungen (2) und (4) einsetzbar. Man erhält aus (10) und (12) folgende Werte für die „reduzierte Kurve“.

Tabelle VII.

Auf unendlich kleine Ablenkung reduzierte Kurve.

$x'$	$y'$	$p$	(1)
0,1850	0,0246	0,5	
0,1919	0,0376	1	
0,2400	0,0502	1	
0,2890	0,0645	1	
0,3359	0,0811	1	
0,3882	0,1001	1	
0,4305	0,1205	1	
0,4785	0,1405	0,25	
0,5252	0,1667	0,25	

Taf. IV, Fig. 11 stellt die reduzierte Kurve graphisch dar.

Aus den Gleichungen (2) und (4) erhält man die *Gleichung der reduzierten Kurve*, wenn man den Zusammenhang zwischen der Masse  $\mu$  und der Geschwindigkeit  $q$  kennt.<sup>1)</sup>

Ist  $\mu_0$  der Wert der elektromagnetischen transversalen Masse des Elektrons für  $q = 0$ , und ist  $\beta = q/c$ , wo  $c$  die Lichtgeschwindigkeit, so ist allgemein:

$$(13) \quad \mu = \mu_0 \cdot \Phi(\beta).$$

Dabei hängt die Gestalt der Funktion  $\Phi(\beta)$  von den über die Konstitution des Elektrons gemachten Grundannahmen ab und ist später bei Besprechung der einzelnen Theorien zu bestimmen.

Durch Einsetzen in (2) und (4) erhält man

$$(14) \quad z' = \frac{e}{\mu_0} \cdot \frac{M}{c} \cdot \frac{1}{\beta \cdot \Phi(\beta)}, \quad 2)$$

$$(15) \quad y' = \frac{e}{\mu_0} \cdot \frac{E}{c^2} \cdot \frac{1}{\beta^2 \cdot \Phi(\beta)}.$$

1) Genau genommen müsste hier  $\mu$  als Funktion von  $q_x$ , an Stelle von  $q$ , betrachtet werden. Bei gleicher magnetischer Ablenkung ist die elektrische Ablenkung der Spannung an den Kondensatorplatten nicht genau proportional, da gleichbleibendem  $q_x$  bei größerer elektrischer Ablenkung größeres  $q$  als auch größeres  $\mu$  entspricht. Die Ablenkungen wachsen also etwas langsamer als das Feldintegral.

2) Die in den folgenden Gleichungen dargelegte Berechnungsmethode ist von Hrn. C. Runge (Gött. Nachr. 1903, Heft 5) angegeben.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(16) \quad \frac{\sigma}{\mu_0} \cdot \frac{M}{c} = \frac{1}{A} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma}{\mu_0} \cdot \frac{E}{c^2} = B.$$

$$(17) \quad \frac{1}{\beta \cdot \Phi(\beta)} = u \quad \text{und} \quad \frac{1}{\beta^2 \cdot \Phi(\beta)} = v = f(u),$$

so kann man schreiben:

$$(18) \quad y' = B \cdot v = B \cdot f(Az).$$

Ist also eine Hilfstabelle (vgl. Anhang p. 552) berechnet, die zu einer möglichst engen Reihe von  $u$ -Werten die zugehörigen  $v$  angibt, so läßt sich, wenn  $A$  und  $B$  bekannt sind, zu jedem  $z'$  nach Gleichung (18) das zugehörige  $y'$  berechnen und mit dem beobachteten vergleichen. Es gelingt leicht, für die beiden „Kurvenkonstanten“  $A$  und  $B$  angenäherte Werte zu finden, und die dann noch anzubringenden Verbesserungen nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen. Die so bestimmten Kurvenkonstanten kann man dann mit den durch Gleichung (16) definierten „Apparatzkonstanten“ vergleichen, d. h. denjenigen Werten für  $A$  und  $B$ , die sich aus den gemessenen Feldintegralen und dem von Kathodenstrahlbeobachtungen bekannten Wert von  $\sigma/\mu_0$  ergeben. Über die zweckmäßigste Art der Vergleichung vgl. w. u.

## 2. Vergleichung mit den Theorien von Abraham, Lorentz und Bucherer.

Die die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit ausdrückende Funktion  $\Phi(\beta)$  hat nach den in der Überschrift dieses Paragraphen genannten und in der Einleitung näher präzisierten drei Theorien folgenden Wert:

$$\text{I. (Abraham)} \quad \Phi(\beta) = \frac{3}{4} \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \cdot \lg \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right)$$

$$\text{II. (Lorentz)} \quad \Phi(\beta) = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

$$\text{III. (Bucherer)} \quad \Phi(\beta) = (1 - \beta^2)^{-1/3}$$

Die Einstein'sche Theorie führt zu derselben Formel wie die Lorentzsche, wenn man sich an die von Hrn. Einstein (l. c.) angegebenen Bewegungsgleichungen hält; die von Hrn. Einstein gegebene etwas abweichende Definition der Masse für einen mit dem Elektron mitbewegten Beobachter entspricht nicht

den bei meinen Beobachtungen vorliegenden Verhältnissen; die Abweichung seiner Gleichung für die Masse des Elektrons von der Lorentzschen ist deshalb auch nur eine scheinbare.

In den Fällen I. und III. ergeben sich aus den Gleichungen (14) bis (16) folgende Beziehungen zwischen den Apparatenkonstanten, den Kurvenkonstanten und  $\epsilon/\mu_0$ :

$$(19) \quad A \cdot B = E/Mc = \beta \cdot y'/z',$$

$$(20) \quad \epsilon/\mu_0 = c/A M = B c^2/E = c \sqrt{B c/A M E}.$$

Im Falle II. ist eine Trennung der Variablen möglich und man erhält als Gleichung der reduzierten Kurve:

$$(21) \quad y'^2 = C^2 z'^2 + D^2 z'^4,$$

wobei:

$$(22) \quad C = E/Mc$$

und

$$(23) \quad \epsilon/\mu_0 = c C/M D = c^2 C^2/E D = \frac{c C}{D} \cdot \sqrt{c C/M E}.$$

Die Gleichungen (19) und (22) gestatten die Vergleichung von  $A B$  bez.  $C$  mit einer direkt aus der Versuchsanordnung berechneten Größe. Sie sind also ein direktes Prüfungsmitte für die betreffende Theorie. Die Gleichungen (20) und (23) enthalten noch den Kathodenstrahlwert  $\epsilon/\mu_0$ , über dessen Betrag noch keine vollkommene Einigkeit zu herrschen scheint. Er ergibt sich hier auf zwei verschiedenen Wegen, unter Berücksichtigung entweder des elektrischen oder des magnetischen Feldintegrals allein. Beide Werte weichen voneinander um so mehr ab, je weniger die Gleichungen (19) und (22) sich erfüllt zeigen. Für eine Vergleichung mit den an Kathodenstrahlen beobachteten Werten erscheint es am besten, die etwaigen Beobachtungsfehler auf magnetisches und elektrisches Feldintegral gleichmäßig zu verteilen und das geometrische Mittel aus beiden Werten zu nehmen; dies ist die Bedeutung der dritten Ausdrücke für  $\epsilon/\mu_0$  in Gleichungen (20) und (23).

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt folgende Werte der Kurvenkonstanten:

I. Nach Abraham:  $A = 2,169 \cdot 4/3 \quad B = 0,08355 \cdot 3/4$

II. " Lorentz:  $C^2 = 0,02889 \quad D^2 = 0,2872$

III. " Bucherer:  $A = 2,9337 \quad B = 0,06284$

Die folgende Tabelle enthält die Resultate der Berechnung:

Tabelle VIII.

Vergleichung der beobachteten mit der berechneten Kurve.

$x'$	$y_{\text{beob.}}$	$p$	$y'_{\text{ber.}}$			$\delta$			$\beta$		
			I	II	III	I	II	III	I	II	III
0,1350	0,0246	0,5	0,0251	0,0246	0,0254	- 5	0	- 8	0,974	0,924	0,971
0,1919	0,0376	1	0,0377	0,0375	0,0379	- 1	+ 1	- 3	0,922	0,875	0,919
0,2400	0,0502	1	0,0502	0,0502	0,0502	0	0	0	0,867	0,875	0,864
0,2890	0,0545	1	0,0649	0,0651	0,0647	- 4	- 6	- 2	0,807	0,828	0,806
0,3359	0,0811	1	0,0811	0,0813	0,0808	0	- 2	+ 3	0,752	0,718	0,750
0,3882	0,1001	1	0,0995	0,0997	0,0992	+ 6	+ 4	+ 9	0,697	0,661	0,695
0,4305	0,1205	1	0,1201	0,1202	0,1200	+ 4	+ 3	+ 5	0,649	0,616	0,647
0,4735	0,1405	0,25	0,1408	0,1405	0,1409	- 3	0	- 4	0,610	0,579	0,600
0,5252	0,1687	0,25	0,1682	0,1678	0,1687	- 15	- 11	- 20	0,566	0,527	0,564

Aus der Tabelle geht zunächst hervor, daß man aus der Gestalt der Kurven allein, ohne Berücksichtigung der Absolutwerte der Konstanten keine Entscheidung zugunsten der einen oder anderen Theorie treffen kann.<sup>1)</sup> Der mittlere Fehler der einzelnen Kurvenpunkte beträgt nämlich:

Für I: 5 Mikron (Abraham)

II: 5 (Lorentz)

III: 7 (Bucherer).

Da aber bei der theoretischen Berechnung der Kurve mehrfach Glieder vom relativen Betrage von 1—3 Promille vernachlässigt sind, so ist der Betrag der Vernachlässigung für die mittleren und größeren  $y'$ -Werte bereits von der Ordnung des gefundenen mittleren Fehlers. Ich habe gleichwohl auf eine genauere Berechnung verzichtet, da wegen der großen individuellen Abweichungen der einzelnen Platten voneinander tatsächlich die Fortlassung einer Platte, oder Einführung anderen Gewichtes genügt, um Verschiebungen der Kurve von einigen Mikron zu bewirken.

Man kann also als Resultat der obigen Berechnung zunächst nur sagen, daß alle drei Theorien die relative Gestalt

1) Eine graphische Darstellung der berechneten Kurven vom Maßstabe der Taf. IV, Fig. 11 ist zwecklos, da die Differenzen zu klein sein würden, um mit bloßen Auge gesehen werden zu können.

der Kurve gleich gut darstellen. Aus den Werten für  $\beta$  ersieht man jedoch, daß die Lorentzsche Theorie ganz andere Geschwindigkeiten verlangt, als die Bucherer'sche und Abrahamsche. Für diese beiden sind die Geschwindigkeiten fast identisch und was noch merkwürdiger ist: Die Funktion  $\Phi(\beta)$  stimmt, wie man sich leicht überzeugen kann, für beide innerhalb des hier vorliegenden Geschwindigkeitsintervalls numerisch mit einer Abweichung von höchstens 2 Proz. überein.

Die Entscheidung hängt somit nur von den Gleichungen (19) und (22) bez. (20) und (23) ab.

Die im Anhang p. 543 u. ff. berechneten Werte der Feldintegrale sind:

$$E = 315 \cdot 10^{10} \text{ Elektromagn. Einh. (bei 2500 Volt P. D.)},$$

$$M = 557,1.$$

Somit ist:

$$E/Mc = 0,1884.$$

Dagegen ergibt die Berechnung mittels der Kurvenkonstanten (unter Berücksichtigung der Korrektion wegen des auf p. 518 erwähnten Fehlers der z-Skala):

Differenz in Proz.

I. nach Abraham: $AB = 0,1817$	- 3,5
II. " Lorentz: $C = 0,1689$	- 10,4
III. " Bucherer: $AB = 0,1881$	- 2,8

Die Werte für  $e/\mu_0$  sind:

a) Für Kathodenstrahlen:<sup>1)</sup>  $1,878 \cdot 10^7$ .

b) Für  $\beta$ -Strahlen: Differenz in Proz.

nach Abraham	1,858	1,788	1,823	- 2,9
" Lorentz	1,751	1,569	1,660	- 11,6
" Bucherer	1,883	1,780	1,808	- 3,7

Endlich kann man noch eine Vergleichung der verschiedenen Theorien dadurch ausführen, daß man die Konstanten  $A$  und  $B$ , bez.  $C$  und  $D$  selbst aus den Gleichungen (16) mittels der gemessenen Werte von  $M$  und  $E$  und des Kathoden-

1) Aus dem von S. Simon (Ann. d. Phys. 69. p. 589. 1899) gefundenen Werte  $1,865 \cdot 10^7$  für  $\infty$  kleine Geschwindigkeiten korrigiert. Vgl. Anhang p. 548.

strahlwertes von  $\epsilon/\mu_0$  bestimmt, und mit ihnen die Kurve berechnet. Die berechneten Werte der Konstanten sind:

$$A = \frac{c \cdot \mu_0}{M \cdot s} = \frac{3 \cdot 10^10}{557,1 \cdot 1,878 \cdot 10^7} = 2,867$$

$$B = \frac{s \cdot E}{\mu_0 \cdot c^2} = \frac{1,878 \cdot 10^7 \cdot 815 \cdot 10^{10}}{9 \cdot 10^{28}} = 0,0658$$

$$C = 0,1884$$

$$D = \frac{c \cdot C \cdot \mu}{M \cdot s} = \frac{E \cdot \mu_0}{M^2 \cdot s} = 0,539.$$

Mittels dieser Zahlenwerte läßt sich dann die Kurve nach Gleichung (18) oder (21) berechnen. Es ergibt sich:

Tabelle IX.  
Aus Apparatenkonstanten berechnete Kurven.

$x'$	$y'$		
	Abraham	Lorentz	Bucherer
0,1	0,0191	0,0198	0,0190
0,2	0,0413	0,0434	0,0407
0,3	0,0712	0,0745	0,0696
0,4	0,1104	0,1144	0,1080
0,5	0,1595	0,1642	0,1568

Die so berechneten Punkte sind in Taf. IV, Fig. 11 eingetragen. Man sieht an ihnen, daß die Abweichungen der Lorentzschen Kurve die Beobachtungsfehler weit übersteigen. Doch sei nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß die zuletzt ausgeführte Vergleichung auf der Annahme beruht, daß der Simonsche Wert von  $\epsilon/\mu_0$  richtig sei. Von dieser Annahme frei ist nur die weiter oben ausgeführte Vergleichung der Größe  $E/Mc$ .

Die vorstehenden Ergebnisse sprechen entschieden gegen die Richtigkeit der Lorentzschen und somit auch der Einsteinschen Theorie; betrachtet man diese aber als widerlegt, so wäre damit auch der Versuch, die ganze Physik einschließlich der Elektrodynamik und der Optik auf das Prinzip der Relativbewegung zu gründen, einstweilen als mißglückt zu bezeichnen. Eine Betrachtung der Einsteinschen Theorie zeigt, daß man, um bei Beibehaltung dieses Prinzipes dennoch Übereinstimmung mit meinen Resultaten zu erhalten, bereits die Maxwellschen Gleichungen für ruhende Körper modifizieren müßte, ein Schritt, zu dem sich wohl einstweilen schwer jemand wird entschließen wollen.

Wir werden vielmehr einstweilen bei der Annahme verbleiben müssen, daß die physikalischen Erscheinungen von der Bewegung relativ zu einem ganz bestimmten Koordinatensystem abhängen, das wir als den *absolut ruhenden Äther* bezeichnen. Wenn es bis jetzt nicht gelungen ist, durch elektrodynamische oder optische Versuche einen derartigen Einfluß der Bewegung durch den Äther nachzuweisen, so darf daraus noch nicht auf die Unmöglichkeit eines solchen Nachweises geschlossen werden.

Es erscheint schließlich noch angebracht, die Frage nach der Möglichkeit einer Entscheidung zwischen den vorläufig allein restierenden Theorien von Abraham und Bucherer zu diskutieren. Eine Entscheidung mittels  $\beta$ -Strahlen würde eine noch bedeutend vermehrte Genauigkeit erfordern. Da jedoch jetzt schon die Hauptfehler von der photographischen Platte herrühren, nämlich von Plattenkorn, Verschleierung und Verzerrung der Schicht, so wäre zunächst eine beträchtliche Vergrößerung der Apparatdimensionen und damit auch der Kurve erforderlich, da ja die Plattenfehler sich nicht mit vergrößern, und, was die Schichtverzerrung anbetrifft, sogar verkleinern. Will man bei  $n$ -facher Vergrößerung aller Dimensionen des Apparates auch eine  $n$ -fache Vergrößerung der Kurve haben, so muß das Magnetfeld auf den  $n^{\text{ten}}$  Teil verkleinert werden. Permanente Magnete von genügender Größe (etwa für  $n = 5$ ) zu erhalten, dürfte Schwierigkeiten und jedenfalls enorme Kosten verursachen. Man müßte also doch wieder Elektromagnete anwenden, was wiederum nur dann möglich ist, wenn eine Akkumulatorenbatterie zu alleiniger Verfügung steht. Um das elektrische Feld, daß bei  $n$ -fachem Plattenabstand bei gleichbleibender Spannung von selbst auf den  $n^{\text{ten}}$  Teil sinkt, völlig konstant zu halten, ist eine Batterie von mindestens 3000 Volt nötig, die ebenfalls während der Expositionsduer nicht anderweitig benutzt werden darf. Endlich würde auch für die Ausmessung des Magnetfeldes die Herstellung einer genügend starken Präzisionsstromspule nötig sein. Mit einem Worte, eine weitere Vergrößerung der Genauigkeit auf dem bisher eingeschlagenen Wege würde Mittel erfordern, die die laufenden Institutsmittel weit übersteigen.

Ein anderer Weg bietet sich noch durch Verfeinerung

der von Hrn. Starke<sup>1)</sup> ausgeführten Messungen an schnellen Kathodenstrahlen. Vielleicht gelingt es durch Anwendung Wehnelscher glühender Oxydkathoden auch bei noch höheren Spannungen als 38000 Volt — der oberen Grenze, bis zu der Hr. Starke gelangt ist — genügend stetige Entladungen zu erhalten. Dann erscheint es nicht unmöglich, zu entscheiden, mit welchem Faktor, ob  $\frac{2}{5}$ , oder  $\frac{1}{2}$  oder  $\frac{1}{3}$ , man das von  $\beta^2$  abhängige Glied zu multiplizieren hat, um genaue Übereinstimmung mit der beobachteten Veränderlichkeit von  $\varepsilon/\mu_0$  zu erhalten.<sup>2)</sup> Aber auch hier handelt es sich um die äußerste erreichbare Präzision in Messung und Berechnung, also um Aufwendung außerordentlicher Mittel.

#### Anhang I.

##### Messungs- und Beobachtungsprotokolle.

**L Apparatdimensionen.** Folgendes sind die gefundenen Einstellungen: (Alle Zahlen bedeuten Zentimeter):

$A_1 = 8,5306$	$B_1 = 6,5612$	$C_1 = 4,2953$	$D_1 = 4,2964$
$A_2 = 8,5307$	$B_2 = 6,5615$	$C_2 = 4,2957$	$D_2 = 4,2961$
$A_3 = 8,5318$	$B_3 = 6,5622$	$C_3 = 4,2967$	
$D_1 = 6,0275$	$D_4 = 6,0232$		
$D_2 = 6,0227$	$D_5 = 6,0251$		
$D_3 = 6,0292$	$D_6 = 6,0259$		

Dicke der planparallelen Glasplatte: 4 Einstellungen ergaben in genauer Übereinstimmung

$$4,2691 - 4,0081 = 0,2610.$$

Aus obigen Zahlen berechnet sich zunächst:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= (C_1 + C_2)/2 = 4,2959 \\ &= (C_3 + C_4)/2 = 4,29585 \end{aligned} \right\} \text{im Mittel: } C_0 = 4,2959.$$

Ferner

$$O_0 = O_0 - (C_0 - C_0) = 4,2951.$$

1) H. Starke, l. c.

2) Vgl. auch Anhang p. 548 u. ff.

Aus diesen Zahlen berechnet sich:

$$\left. \begin{aligned} A - C &= A_1 - (C_1 + C_6)/2 = 4,2349 \\ &= A_4 - (C_4 + C_6)/2 = 4,2353 \\ &= A_5 - (C_5 + C_6)/2 = 4,2352 \end{aligned} \right\} \text{im Mittel: } A - C = 4,2351$$

$$\left. \begin{aligned} B - C &= B_1 - (C_1 + C_6)/2 = 2,2660 \\ &= B_2 - (C_2 + C_4)/2 = 2,2655 \\ &= B_3 - (C_3 + C_5)/2 = 2,2658 \end{aligned} \right\} \text{im Mittel: } B - C = 2,2658 .$$

Somit

$$\begin{aligned} A' - B' &= A - B = (A - O) - (B - O) = 1,9693 \\ B' - C &= (B - O) - d = 2,0048 \end{aligned}$$

Die Orientierung des Kondensators ist durch folgende Zahlen bestimmt:

Platte $P_2$ :	$D_4 - (C_1 + C_6)/2 = 1,7318$	Differenz: 0,0026
	$D_5 - (C_3 + C_6)/2 = 1,7292$	Differenz: 0,0026
	$D_2 - (C_2 + C_6)/2 = 1,7266$	
Platte $P_1$ :	$D_8 - (C_1 + C_6)/2 = 1,7385$	Differenz: 0,0035
	$D_6 - (C_3 + C_6)/2 = 1,7300$	Differenz: 0,0029
	$D_4 - (C_2 + C_6)/2 = 1,7271$	

Man sieht aus den angegebenen Differenzen, daß die Oberkanten der Platten nicht ganz genau parallel  $C$  sind, sondern eine kleine Neigung haben. Ferner ist die Kante von  $P_1$ , wie aus der Ungleichheit der Differenzen hervorgeht, ein wenig konkav. Endlich weisen die Mitten beider Kanten eine Höhendifferenz von nicht ganz  $\frac{1}{1000}$  cm auf; das ist aber, da die Platten selbst (vgl. w. u.) eine Höhe von etwa 1,5 cm haben, ein Fehler von bloß  $\frac{1}{3}$  Promille bez. des „elektrischen Feldintegrals“ (vgl. w. u. p. 544 u. ff.).

Für die Feldberechnung kommt nur die Lage der Kantenmitte in Betracht, also:

$$\mathbf{D} - \mathbf{C} = (1,7292 + 1,7300)/2 = 1,7296.$$

Die Höhe der Platten längs der Mittellinie wurde bei Platte  $P_1$  direkt gemessen; bei  $P_2$  mußte wegen des Befestigungswinkels in gleichen Abständen links und rechts von der Mitte gemessen und das Mittel genommen werden. Es ergab sich:

$$\text{Für } P_1: h_1 = 1,4835 \\ \text{für } P_2: h_2 = (1,4845 + 1,4836)/2 = 1,4840.$$

Also im Mittel:  $h = (h_1 + h_2)/2 = 1,4838$ .

## Abstand der Kondensatorplatten.

Wegen des Einflusses der Kollimationsfehler wurde Kundtsche Kollimationsmethode angewandt; abwechselnd von unten und von oben her fokussiert. Beispiel einer einzelnen Messungsreihe:

(Die Zahlen unter  $S$  sind die Ablesungen am Schlittenmikroskop in Zentimetern, die Zahlen unter  $O$  die an der Mikrometertrommel des Objektmikroskopes abgelesenen  $\frac{1}{100}$  mm. Die römischen Ziffern bezeichnen die Ablesung an der Platte  $P_1$  bez.  $P_2$ .)

Messungsreihe Nr. 28.

I.		II.	
$S$	$O$	$S$	$O$
0,68398	29,0	0,56238	56,0
96	29,2	88	55,5
89	30,0	84	55,6
90	29,0	42	55,4
94	29,0	42	54,8
0,68393	29,3	0,56239	55,5
292		555	
0,68101		0,55684	
0,55684			

$$d = 0,12517 = \text{Abstand der Platten} (\pm 0,2 \mu)$$

In gleicher Weise im ganzen 23 Messungen:

Nr.	$d$	Nr.	$d$	Nr.	$d$
7	0,12375	15	0,12506	24	0,12481
8	450	16	482	25	445
9	414	17	466	26	447
10	393	18	435	27	392
11	399	19	444	28	517
12	399	20	482	29	299
13	432	21	436	30	355
14	485	22	490		

$$\text{Im Mittel: } d = 0,12434 \text{ cm} \pm 0,00011.$$

II. *Relative Magnetfeldmessung.* Messungen bezogen auf Höhe  $h$ , an der Skala des Meßapparates (Fig. 6) abgelesen. Probespule befindet sich in Höhe der Oberfläche des Ringes  $S$  am Vakuumgefäß (Fig. 2) bez. der Unterfläche des Ringes  $R'$  am Aufnahmeapparat, wenn  $h = 3,20$  cm. Von dort bis zur Bodenfläche  $C$  des Aufnahmeapparates beträgt die Entfernung 2,11 cm; somit ist die von  $C$  aus gerechnete Höhe

$$x = 2,11 + h - 3,20 = h - 1,09.$$

Für die Umrechnung ist es bequemer, den Nullpunkt 0,09 cm unter C zu wählen, so daß  $x = h - 1$ .

Beispiel einer Einzelmessung:

$$h = 3,0 \quad x = 2,0.$$

Ausschlag:	479,0	478,5	478,5	483	484,5	484
Nullpunkt:	12,5	12,5	12,5	18	18	18
Differenz:	466,5	466	466	465	466,5	466

$$\text{Im Mittel: } 466,0.$$

In ähnlicher Weise sind alle übrigen Punkte gemessen. Die ganze Skala wurde hin und zurück durchmessen, um etwaige zeitliche Änderungen der Galvanometerempfindlichkeit zu eliminieren. Die letzten drei Messungen sind auf dem Rückwege gemacht; es hat sich nur der Nullpunkt allmählich etwas verschoben, die Empfindlichkeit ist dieselbe geblieben. Die Entfernung der Skala vom Spiegel betrug etwa 3 m, Reduktion auf unendlich kleine Ablenkungen war wegen der geringen Veränderlichkeit der Ausschläge unnötig.

IV. *Absolute Magnetfeldmessung.* Die Notwendigkeit, den ganzen Apparat auf der in Abt. I erwähnten Marmorplatte zu montieren (eine andere Möglichkeit zu genügend erschütterungsfreier Aufstellung war wegen der mangelhaften baulichen Verhältnisse des Instituts nicht vorhanden), zwang zur Wahl einer Skalenentfernung von bloß 855 mm. Deshalb die viel kleineren Ausschläge. Außerdem war Schiefstellung der Skala nötig, so daß sorgfältige Reduktion auf unendlich kleine Ausschläge ausgeführt werden mußte.

Ich teile die Einzelmessungen im Feld der Stromspule mit:

Tabelle.

Reduz. Ausschl. $N$	Ampéremeter- ablesung $A$ vor Kommutieren	Ampéremeter- ablesung $A$ nach Kommutieren	Mittlerer Strom in Ampéra. $J = 0,257 \cdot A$	$N/J$
- 91,9	128,5	128,5	32,02	- 2,781
+ 90,9	128,0	127,2	32,80	+ 2,768
- 90,5	126,3	126,3	32,47	- 2,784
+ 90,6	127,0	126,0	32,52	+ 2,786
- 91,1	126,0	126,0	32,37	- 2,816
+ 89,7	125,5	125,0	32,17	+ 2,786

$$\text{Im Mittel: } N/J = 2,787 \pm 6,4 = 2,787 \cdot (1 \pm 2,3/1000).$$

## V. Versuchsprotokolle.

Platte 10.

Batteriespannung zu Beginn . . . .	827,02 Volt
am Schluß . . . .	826,85 "
Mittel:	826,93 Volt

Zeit	Isolation (verliert 500 Volt in Sek.)	Bemerkungen
13. VI. 05 11 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup> Vorm.	75	Zu pumpen begonnen
11 35 "	—	Elektr. Feld angelegt
12 50 Nachm.	—	Pumpe abgestellt
14. VI. 05 8 50 Vorm.	60	
10 15 "	60	Elektr. Feld umgekehrt
15. VI. 05 9 0 "	20	Schluß

Unkorrigierte Apparatspannung:  $V = 4 \cdot 2 \cdot 826,93 = 2615$  Volt.  
Kurve etwas schwach, aber klar. Schichtriß durch Ende eines Kurvenastes.

Platte 11.

Batteriespannung zu Beginn . . . .	826,85 Volt
am Schluß . . . .	826,77 "
Mittel:	826,81 Volt

Zeit	Isolation (verliert 500 Volt in Sek.)	Bemerkungen
15. VI. 05 10 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> Vorm.		Zu pumpen begonnen
11 0 "	110	Elektr. Feld angelegt
12 30 Nachm.	—	Pumpe abgestellt
2 45 "	10	Seit 2 <sup>h</sup> Gewitter
4 15 "	17	Gewitter hat bis 3 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> gedauert, Wetter klar, aber schwül
16. VI. 05 9 20 Vorm.	5	Gepumpt von 9 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup> bis 9 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>
11 30 "	20	
12 0 "	—	Elektr. Feld umgekehrt
4 45 Nachm.	20	Schwül, nabendes Gewitter
6 0 "	35	Gewitter
17. VI. 05 9 30 Vorm.	5	Klar, aber noch schwül
12 0 "	> 250	Sehr warm. Schluß

Unkorrigierte Apparatspannung:  $V = 4 \cdot 2 \cdot 826,81 = 2614,5$  Volt.  
Kurve kräftig, aber starker Schleier.

## Platte 12.

Batteriespannung zu Beginn . . . . . 326,77 Volt

, , , am Schluß . . . . . 326,75 "

Mittel: 326,76 Volt

Zeit	Isolation (verliert 500 Volt in Sek.)	Bemerkungen
------	--	-------------

17. VI. 05 5 <sup>h</sup> 17 <sup>m</sup> Nachm.	—	Zu pumpen begonnen
5 55 ,	50	Elektr. Feld angelegt
6 15 ,	—	Pumpe abgestellt
18. VI. 05 12 40 ,	10	Elektr. Feld umgekehrt. Schwül, Gewitterschauer seit 17. VI. abends. Seit 18. VI. 1 <sup>h</sup> Nachm. zunehmende Aufklärung
19. VI. 05 9 45 Vorm.	150	Elektr. Feld wieder umgekehrt, warmes trocknes Wetter
12 5 Nachm.	> 250	Schluß

Unkorrigierte Apparatspannung:  $V = 4 \cdot 2 \cdot 326,76 = 2614,1$  Volt.

Kurve wie bei Platte 11.

## Platte 13.

Batteriespannung zu Beginn . . . . . 326,75 Volt

, , , am Schluß . . . . . 326,65 "

Mittel: 326,70 Volt

Bei Zeit	Isolation (verliert 500 Volt in Sek.)	Bemerkungen
----------	--	-------------

19. VI. 05 4 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup> Nachm.	—	Zu pumpen begonnen
4 55 ,	60	Elektr. Feld angelegt, Wetter kühl, trocken
6 15 ,	—	Pumpe abgestellt
20. VI. 05 9 10 Vorm.	12	
10 30 ,	20	
11 25 ,	45	
12 0 ,	—	Elektr. Feld umgekehrt
21. VI. 05 8 10 ,	8	
9 25 ,	—	Elektr. Feld nochmals umgekehrt
11 30 ,	—	Schluß

Unkorrigierte Apparatspannung:  $V = 5 \cdot 2 \cdot 326,70 = 3267$  Volt.

bei Kurve wie Platte 11 und 12.

## Platte 15.

In der Mitte geerdete Batterie direkt angelegt, also keine Isolationsverluste.

Batteriespannung zu Beginn . . . .	326,35 Volt
, am Schluß . . . .	326,25 "
Mittel:	326,30 Volt

Zeit	Bemerkungen
25. VI. 05 10 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup> Vorm.	Zu pumpen begonnen
11 10 ,	Elektr. Feld angelegt
11 45 ,	Pumpe abgestellt
26. VI. 05 11 15 ,	Elektr. Feld umgekehrt
27. VI. 05 10 15 ,	Schluß

$$\text{Apparatspannung: } V = 5 \cdot 326,30 = 1631,5 \text{ Volt.}$$

Platte etwas mehr verschleiert als die anderen.

**VI. Kurvenmessungen.** Als Beispiel sei das Messungsprotokoll der Platte 12 mitgeteilt. Zahlenangaben in Millimetern. Messung von  $z$  folgendermaßen: Zuerst Einstellung mittels  $z$ -Schraube auf unabgelenkten Fleck und zwar fünfmal ( $a$ ). Dann Seitenverschiebung mittels  $y$ -Verschiebung, bis Marke zwischen zwei Strichen der  $z$ -Skala fällt. Nächst niederer Strich der Skala sei  $z_1$ . Dann Einstellung mit  $z$ -Schraube auf  $z_1$ , Ablesung  $b$  fünfmal; dann ebenso Einstellung auf  $z_1 - 1$ , Ablesung  $c$  fünfmal.

$$z_1 = 0,1.$$

$a$	$b$	$c$
59,2	68,2	58,7
58,4	68,5	58,8
59,1	68,3	54,1
58,5	68,6	53,9
58,7	68,7	54,2
Mittel: 58,8	68,1	58,9

Es ist:

$$z_0 = z_1 + 0,1 \cdot (b - a) / (b - c) = 0,147.$$

Dann Messung von  $y_1$  und  $y_2$  für willkürlich gewählte  $z$ . Es ist

$$z_b = z - z_0; \quad y_b = (y_1 - y_2) / 2.$$

$z = 1,500$	$z = 2,000$	$z = 2,500$	$z = 3,000$				
$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$
15,332	14,790	15,465	14,676	15,579	14,540	15,738	14,872
43	90	68	81	608	23	43	64
30	89	62	85	583	46	38	73
37	85	72	69	593	30	49	68
15	91	71	75	578	37	37	69
27	84	72	77	610	31	51	76
28	88	68	84	597	35	59	73
31	91	70	69	597	37	65	81
36	808	67	90	588	38	50	81
40	780	66	88	601	32	58	74
15,332	14,789	15,468	14,679	15,593	14,535	15,748	14,878
$z = 3,500$	$z = 4,000$	$z = 4,500$	$z = 5,000$				
$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$
15,901	14,194	16,096	14,010	16,316	18,791		18,564
17	94	103	18,996	20	781		70
21	95	090	14,022	07	799		65
27	95	104	18,990	18	778		61
14	98	101	14,011	18	805		71
24	88	114	18,984	21	787		64
04	98	102	14,005	28	803		52
19	88	123	14,000	33	784		77
21	91	105	14,008	23	811		67
17	80	122	14,003	25	811		65
15,917	14,191	16,106	14,008	16,321	18,795		18,566

Bei dem letzten Punkt ist  $y_1$  nicht mehr meßbar.  $y_2$  ist berechnet als Differenz zwischen  $y_2$  und dem Mittelwert von  $y_0 = (y_1 + y_2)/2$  für sämtliche Punkte.

### Anhang II.

#### Berechnung der Feldintegrale.

I. *Magnetisches Feldintegral.* Für  $H$  war die empirische Gleichung gefunden (p. 513)

$$(1) \quad H = 141,7 + 4,1x - 2,0x^2 + 0,2x^3.$$

Daraus folgt unter Vernachlässigung der mit kleinen Zahlen multiplizierten Quadrate von  $x_0$ :

$$(2) \quad \int_{x_0}^x H dx = 141,7 \cdot (x - x_0) + 2,05x^2 - 0,667x^3 + 0,05x^4,$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^{x_1} dx \int^{\infty}_0 H dx = 70,85(x_1 - x_0)^2 + 0,683x_1^3 - 0,167x_1^4 \\ + 0,01x_1^5 = J_1, \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^{x_2} dx \int^{\infty}_0 H dx = 70,85(x_2 - x_0)^2 + 0,683x_2^3 - 0,167x_2^4 \\ + 0,01x_2^5 = J_2. \end{array} \right.$$

Hierbei ist  $x = 0$  für einen 0,09 cm unter der Fläche  $C$  liegenden Punkt (vgl. p. 539).

Somit:

$$x_1 = 2,005 + 0,09 = 2,095,$$

$$x_2 = 2,005 + 1,969 + 0,09 = 4,064,$$

$$x_0 = 0,09 + 0,011 = 0,101$$

(0,011 = Höhe der Strahlungsquelle vgl. p. 507). Daraus:

$$J_1 = 285,2, \quad J_2 = 1123,8$$

und

$$M = J_2 - \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \cdot J_1 = 557,1.$$

#### Berechnung des von ungenauer Orientierung im Felde herrührenden Fehlers.

Die Lagebeziehung der verschiebbaren Probespule zum Aufnahmegerät ist nur auf etwa 0,5 mm genau bekannt. In den beiden Integralen ist das Hauptglied  $(x_1 - x_0)^2$  von dieser Unsicherheit unabhängig. Eine Veränderung der Grenzen  $x_1$  und  $x_2$  um  $\delta x$  bewirkt also eine Veränderung:

$$\delta J_1 = \delta x \{3 \cdot 0,683x_1^2 - 4 \cdot 0,167x_1^3 + 5 \cdot 0,01x_1^4\} = -1,8\delta x$$

und ähnlich:

$$\delta J_2 = 3,4\delta x. \quad \text{Hierzu ist } \delta M = 3,4 + 2 \cdot 18 = 7.$$

Somit:

$$\frac{\delta M}{\delta x} = 3,4 + 2 \cdot 18 = 7.$$

Einer Verschiebung um 0,5 mm entspricht also eine Änderung

$$\delta M = 0,85 = 0,6\%.$$

**II. Elektrisches Feldintegral.** Wir legen der Bequemlichkeit halber den Koordinatenanfang in die Strahlungsquelle, indem wir von allen von  $C$  aus gemessenen  $x$  den Betrag 0,011 cm abziehen.

Dann lautet das elektrische Feldintegral:

$$(1) \quad E = (x_2 - x_1) \left\{ \int_0^{x_1} F dx - \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} dx \int_0^x F dx \right\}.$$

Dabei ist dann:

$$x_2 - x_1 = 1,969,$$

$$x_1 = 1,994.$$

Etwa 1 mm innerhalb des Plattenrandes ist das Feld praktisch konstant. Wir zerlegen deshalb die Strecke  $x_1$  in drei Teile:

- $a$  vom Nullpunkt bis 1 mm hinter dem unteren Plattenrand,
- $c$  „ Endpunkte von  $a$  bis 1 mm vor dem oberen Plattenrand,
- $b$  „ „ „ „ zum Diaphragma.

Es ist also:

$$a = 0,246 + 0,1 - 0,011 = 0,335$$

$$c = 1,484 - 0,2 = 1,284$$

$$b = 0,275 + 0,1 = 0,375$$

$$a + c + b = 1,994 = x_1$$

Es ist:

$$(2) \quad \begin{cases} \int_0^x F dx = \int_0^x F dx & \text{für } 0 < x < a, \\ = \int_0^a F dx + (x - a) & " \quad a < x < a + c, \\ = \int_0^a F dx + c + \int_{a+c}^x F dx & " \quad a + c < x < x_1. \end{cases}$$

Somit:

$$(3) \quad \int_0^{x_1} F dx = \int_0^a F dx + \int_{a+c}^{x_1} F dx + c.$$

Es ist ferner in leicht verständlicher Abkürzung:

$$(4) \quad \begin{cases} \int_0^{x_1} \int_0^x F dx = \int_0^a \int_0^x F dx + \int_a^{a+c} \int_0^x F dx + \int_{a+c}^{x_1} \int_0^x F dx \\ = \int_0^a \int_0^a F dx + c \int_0^a \int_0^a F dx + \frac{(a+c)^2}{2} - \frac{a^2}{2} - ac + b \int_0^{x_1} \int_{a+c}^x F dx + bc + \int_{a+c}^{x_1} \int_{a+c}^x F dx. \end{cases}$$

Führt man in dem letzten Doppelintegral die neue Variable

$$\xi = x_1 - x,$$

d. h. den Abstand vom Diaphragma ein, so wird

$$\begin{aligned} \int_{a+c}^{x_1} dx \int_a^x F dx &= \int_b^0 d\xi \int_b^\xi F d\xi = \int_b^0 \int_b^\xi + \int_b^0 \int_0^\xi \\ &= b \cdot \int_0^b F d\xi - \int_0^b d\xi \int_0^\xi F d\xi. \end{aligned}$$

Somit:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{x_1} dx \int_0^x F dx &= \int_0^a dx \int_0^x F dx - \int_0^b d\xi \int_0^\xi F d\xi + (b+c) \int_0^a F dx \\ &\quad + b \int_0^b F d\xi + \frac{c^2}{2} + bc, \end{aligned} \right.$$

und nach (3):

$$(6) \quad \int_0^{x_1} F dx = \int_0^a F dx + \int_0^b F d\xi + c.$$

Setzt man (5) und (6) in (1) ein, so erhält man (für  $F = 1$  im konstanten Bereich):

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} E_1 &= (x_2 - x_1) \left\{ \frac{c}{2} + \int_0^b F d\xi - \frac{1}{x_1} \left[ \frac{c}{2} (b-a) + b \int_0^b F d\xi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a \int_0^a F dx - \int_0^b d\xi \int_0^\xi F d\xi + \int_0^a dx \int_0^x F dx \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

In diesem Ausdruck stellen die ersten beiden Glieder in der geschweiften Klammer denjenigen Wert von  $E_1/(x_2 - x_1)$  dar, der bei völlig symmetrischer Stellung der Kondensatorplatten zwischen Boden und Diaphragma und völligem Zusammenfallen der Strahlenquelle mit dem Boden eintreten würde; der mit  $1/x_1$  multiplizierte Ausdruck, der bei völlig symmetrischer Anordnung verschwindet, stellt die von der Unsymmetrie herrührende Korrektion dar.

Die Integrale wurden graphisch ausgewertet. Es beträgt der Wert der ersten beiden Glieder („Hauptglieder“):

$$\frac{c}{2} + \int_0^b F d\xi = 0,642 + 0,167 = 0,809.$$

Dagegen betragen die Korrektionsglieder zusammen nur: 0,0141.

Somit wird das Feldintegral für ein Feld  $F = 1$  im homogenen Teil:

$$E_1 = 1,969(0,809 - 0,0141) = 1,565,$$

das Korrektionsglied beträgt also bloß 1,7 Proz.; selbst wenn man nun die beiderseitigen Integrale und Doppelintegrale als gleich ansehen und nur den Abstand des Radiumschwerpunktes vom Boden berücksichtigen würde, so würde das Korrektionsglied lauten:

$$\frac{b-a}{x_1} \left[ \frac{c}{2} + \int_0^b F d\xi \right] = 0,809 \cdot \frac{0,04}{1,994} = 2 \text{ Proz.}$$

Da also ein Gleichsetzen des Feldverlaufs an beiden Enden das Integral nur um  $(2 - 1,7)$  Proz. = 0,3 Proz. verändert, so kann selbst ein Fehler bei der nur schätzungsweise ausgeführten Bestimmung des Feldverlaufes zwischen  $a$  und  $b$  im Betrage von 30 Proz. das Resultat höchstens um 1 Promille beeinflussen.

Für eine Potentialdifferenz von 2500 Volt =  $25 \cdot 10^{10}$  elektromagnetische Einh. und einen Plattenabstand von 0,1242 cm wird also:

$$(8) \quad E = \frac{1,565 \cdot 25}{0,1242} \cdot 10^{10} = 315 \cdot 10^{10}.$$

Von der Genauigkeit der Feldverlaufsmessung ist nur das zweite Hauptglied  $\int_0^b F d\xi = 0,167$  abhängig; dieses beträgt  $100 \cdot 0,167 / 0,809 = 21$  Proz. des Ganzen.

Es würde also selbst ein Fehler von 1 Proz. bei den relativen Feldmessungen erst 2 Promille Fehler im Integral hervorrufen. Man kann somit den vom Feldverlauf herrührenden Fehler in  $E$  zu 2 Promille ansetzen. Dazu kommt der

etwaige Fehler der Potentialbestimmung mit 1 Promille und der Fehler des Plattenabstandes mit 2 Promille. Der maximal mögliche Fehler von  $E$  beträgt also 5 Promille.

### Anhang III.

#### Bestimmung von $\epsilon/\mu_0$ aus Kathodenstrahlen.

In meinen bisherigen Arbeiten, auch in der eingangs zitierten letzten Publikation in den Berliner Berichten habe ich für  $\epsilon/\mu_0$  den Wert  $1,885 \cdot 10^7$  als extrapoliert aus der Simonschen Zahl  $1,865 \cdot 10^7$  angegeben. Das angewandte Extrapolationsverfahren war jedoch nicht ganz korrekt, da ich bei der Rechnung den Unterschied zwischen transversaler und longitudinaler Masse nicht genügend berücksichtigt hatte. Der extrapolierte Wert wird ferner etwas verschieden, je nach der zugrunde gelegten Theorie.

I. Berechnung nach Abraham.<sup>1)</sup> Die Gesamtenergie des Elektrons ist, wenn  $a$  sein Radius,  $\epsilon$  die Ladung in elektromagnetischem Maße

$$W = \frac{\epsilon^2 c^2}{2a} \left\{ \frac{1}{\beta} \lg \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\}$$

oder

$$(1) \quad W = \frac{\epsilon^2 c^2}{2a} \{ 1 + \frac{2}{3} \beta^2 + \frac{2}{3} \beta^4 \dots \},$$

für  $\beta=0$  geht dies in die elektrostatische Energie des ruhenden Elektrons über:

$$W_0 = \frac{\epsilon^2 c^2}{2a},$$

also ist der durch die Bewegung erlangte Energiezuwachs

$$(2) \quad (W - W_0) = W_0 \cdot \frac{2}{3} \beta^2 \{ 1 + \frac{2}{3} \beta^2 \};$$

für die transversale Masse des Elektrons gilt die Gleichung:

$$(3) \quad \mu = \frac{2}{3} \frac{\epsilon^2}{a} \{ 1 + \frac{2}{3} \beta^2 \},$$

was für  $\beta=0$  übergeht in:

$$(4) \quad \mu_0 = \frac{2}{3} \frac{\epsilon^2}{a};$$

somit ist:

$$\frac{2 W_0 \beta^2}{3} = \frac{\mu_0}{2} \beta^2 c^2 = \frac{\mu_0}{2} q^2$$

1) M. Abraham, Theor. d. Elektr. 2. p. 179. Leipzig 1905.

(da  $\beta = q/c$ , wo  $q$  die Geschwindigkeit des Elektrons) folglich:

$$(5) \quad W - W_0 = \frac{\mu_0 q^2}{2} \{1 + \frac{3}{8} \beta^2\}.$$

Ist  $P$  die vom Elektron durchlaufene Potentialdifferenz, so ist die geleistete elektrische Arbeit  $eP$ . Diese muß gleich dem Energiezuwachs sein, also:

$$(6) \quad eP = \frac{\mu_0 q^2}{2} \{1 + \frac{3}{8} \beta^2\}.$$

Die magnetische Ablenkung ist bestimmt durch:

$$(7) \quad z = \frac{e}{\mu_0 q} M = \frac{e}{\mu_0 q} M(1 - \frac{3}{8} \beta^2).$$

Aus (6) und (7) folgt, durch Elimination von  $q$ :

$$(8) \quad \frac{e}{\mu_0} = \frac{2 P z^2}{M^2} (1 + \frac{1}{8} \beta^2).$$

Setzt man den Annäherungswert für  $e/\mu_0$ , nämlich  $2Pz^2/M = \alpha$ , so ist in dem Korrektionsgliede mit genügender Genauigkeit, nach Gleichung (6):

$$\beta^2 = \frac{2 \alpha P}{\mu_0 c^2} = 2 \alpha \frac{P}{c^2},$$

also:

$$(9) \quad \frac{e}{\mu_0} = \alpha \left(1 + \frac{3}{8} \alpha \frac{P}{c^2}\right).$$

Es ist bei Simon:

$\alpha = 1,865 \cdot 10^7$ ,  $P = 8300$  Volt =  $8300 \cdot 10^6$  im Mittel, woraus:

$$\frac{3}{8} \alpha \frac{P}{c^2} = 0,0070$$

und

$$(10) \quad \frac{e}{\mu_0} = 1,878 \cdot 10^7 \text{ (Abraham)}$$

II. Berechnung nach Bucherer.<sup>1)</sup> Es ist:

$$W = W_0 \frac{1 + \frac{\beta^2}{3}}{(1 - \beta^2)^{1/2}}$$

woraus durch Reihenentwickelung:

$$(11) \quad W - W_0 = W_0 \cdot \frac{3}{8} \beta^2 (1 + \frac{1}{8} \beta^2),$$

1) A. Bucherer, Math. Einf. in die Elektronentheorie. p. 58. Leipzig 1904.

oder

$$(12) \quad W - W_0 = \varepsilon P = \frac{\mu_0 q^3}{2} (1 + \frac{1}{2} \beta^2),$$

ferner:

$$\mu = \mu_0 \cdot (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

also

$$(13) \quad z = \frac{\varepsilon}{\mu q} M = \frac{\varepsilon}{\mu_0 q} M (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}},$$

woraus wieder durch Elimination von  $q$ :

$$(14) \quad \frac{\varepsilon}{\mu_0} = \frac{2 P z^2}{M^2} (1 + \frac{1}{2} \beta^2),$$

oder in gleicher Bezeichnungsweise wie bei I:

$$(15) \quad \frac{\varepsilon}{\mu_0} = \alpha \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha \frac{P}{c^2} \right).$$

Es ist

$$\frac{1}{2} \alpha \frac{P}{c^2} = 0,0059,$$

somit:

$$(16) \quad \frac{\varepsilon}{\mu_0} = 1,876 \cdot 10^7 \text{ (Bucherer).}$$

**III. Berechnung nach Lorentz.** Beim Lorentzschen Elektron ist, wie bereits in der Einleitung erwähnt, das Energieprinzip nur dann aufrecht zu erhalten, wenn man dem Elektron nach Abraham (l. c. p. 207) eine innere Energie  $E$  zuschreibt, für welche die Gleichung gilt:

$$(17) \quad \frac{dE}{dq} = - \frac{\mu_0}{4} \frac{q}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

und dann setzt:

$$(18) \quad \begin{cases} \varepsilon P = (W - W_0) + \int_0^q \frac{dE}{dq} dq = W - W_0 + \frac{\mu_0 q^3}{4} \left\{ \sqrt{1 - \beta^2} - 1 \right\} \\ \quad = W - W_0 - \frac{\mu_0 q^3}{2 \cdot 4} \left\{ 1 + \frac{\beta^2}{4} \right\}, \end{cases}$$

für  $W$  gilt:

$$(19) \quad W = \frac{\varepsilon^2 c^3}{2 \alpha} \frac{1 + \frac{\beta^2}{8}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = W_0 \frac{1 + \frac{\beta^2}{3}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

woraus durch Reihenentwicklung:

$$(20) \quad W - W_0 = \frac{\mu_0 q^3}{2} \cdot \frac{5}{4} [1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \beta^2]$$

oder

$$(21) \quad eP = \frac{\mu_0}{2} q^2 \left\{ \frac{1}{4} [1 + \frac{1}{2} \beta^2] - \frac{1}{4} [1 + \frac{1}{4} \beta^2] \right\},$$

oder

$$(22) \quad eP = \frac{\mu_0 q^2}{2} [1 + \frac{3}{4} \beta^2].$$

Ferner ist

$$(23) \quad \mu = \mu_0 (1 - \beta^2)^{-1/2},$$

woraus

$$(24) \quad z^2 = \frac{e^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{M^2}{q^2} (1 - \beta^2)$$

und

$$(25) \quad \frac{e}{\mu_0} = \frac{2 P z^2}{M^2} (1 + \frac{1}{4} \beta^2)$$

oder

$$(26) \quad \frac{e}{\mu_0} = \alpha \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha \frac{P}{c^2} \right).$$

Es ist

$$\text{und } \frac{\alpha P}{c^2} = 8,8 \cdot 10^{-3}$$

$$(27) \quad \frac{e}{\mu_0} = 1,881 \cdot 10^7 \text{ (Lorentz)}.$$

Da die Unterschiede in  $e/\mu_0$  nach I, II und III innerhalb der Beobachtungsfehler liegen, so genügt es den Mittelwert zu nehmen:

$$\frac{e}{\mu_0} = 1,878 \cdot 10^7.$$

#### Anhang IV.

##### Grenzen des $\beta$ -Strahlenspektrums.

Die Grenzen der gemessenen Kurve stellen nicht die wirklichen Grenzen des überhaupt sichtbaren „Spektrums“ der  $\beta$ -Strahlen dar. Dieses erstreckt sich beiderseits noch ein Stück über die Grenze der genauen Meßbarkeit heraus. Wie weit sich die Kurve noch verfolgen läßt, hängt natürlich sehr von dem Zustand der Platten ab. Weitaus am klarsten waren die ersten, noch von den Vorversuchen stammenden Platten, bei deren Aufnahme der Apparat noch nicht merklich durch induzierte Aktivität infiziert war. Auf Platte Nr. 1, die ohne elektrisches Feld aufgenommen war, ließ sich die Kurve nach außen bis  $z_s = 0,71$ , also  $z' = 0,655$  verfolgen. Auf Platte 2 lag die innere Sichtbarkeitsgrenze bei etwa  $z_s = z' = 0,06$ .

Diesen beiden Grenzen entsprechen nach Abraham und Bucherer folgende Werte von  $\beta$ :

$x_b$	$\beta$	
	Abraham	Bucherer
0,06	0,9995	0,9975
0,71	0,48	0,48

Der Intensitätsabfall an beiden Grenzen ist ein sehr allmählicher; man kann kaum sagen, ob jenseits der angegebenen Grenzen die Intensität wirklich Null wird, oder nur zu schwach, um sich von dem allgemeinen Schleier, der die Platte bedeckt, genügend abzuheben. Vermutlich nähert sich die Intensität der Strahlen nach beiden Seiten hin asymptotisch der Grenze Null.

Da die Starkeschen Messungen (l. c.) bis zu etwa  $\beta = 0,88$  reichen, so ist das noch unerforschte Gebiet ein verhältnismäßig kleines. Es erscheint durchaus nicht unmöglich, die Lücke mittels Kathodenstrahlen zu überbrücken, denn für  $\beta = 0,5$  bedarf es einer Spannung von rund 140000 Volt; derartige Spannungen sind aber an harten X-Strahlenröhren nichts Außergewöhnliches. Mit Kathodenstrahlen derartiger Geschwindigkeit wird also tatsächlich operiert; es handelt sich bloß noch darum, an diesen auch Messungen auszuführen. In diesem Gebiet von  $\beta = 0$  bis  $\beta = 0,5$  weichen aber die beiden Kurven von Abraham und Bucherer am meisten voneinander ab; dort allein ist somit eine sichere Entscheidung möglich.

#### Anhang V.

##### Hilfstabelle für Abrahamsche Theorie.

$\beta$	8/4. u	8/4. v	$dv/du$	$\beta$	8/4. u	8/4. v	$dv/du$
0,55	1,1842	2,1581	3,15	0,67	0,8894	1,8275	2,45
0,56	1,1660	0,642	3,07	0,68	0,8684	2,770	2,40
0,57	1,2885	1,9799	3,00	0,69	0,8477	2,285	2,34
0,58	1,018	8997	2,93	0,70	0,8273	1819	2,28
0,59	0,758	8284	2,87	0,71	0,8073	1370	2,24
0,60	0,505	7509	2,80	0,72	0,7877	0940	2,19
0,61	0,258	6817	2,74	0,73	0,7683	0524	2,15
0,62	0,018	6158	2,67	0,74	0,7491	0123	2,09
0,63	0,9783	5529	2,67	0,75	0,7303	0,9737	2,05
0,64	9554	4928	2,62	0,76	0,7117	9364	2,00
0,65	9330	4354	2,56	0,77	0,6932	9003	1,95
0,66	9110	3803	2,50	0,78	0,6749	8658	1,91
			2,45				1,87

## Hilfstabelle (Fortsetzung).

$\beta$	$3/4 \cdot u$	$3/4 \cdot v$	$d v / d u$	$\beta$	$3/4 \cdot u$	$3/3 \cdot v$	$d v / d u$
0,79	0,6569	0,8815	1,87	0,935	0,3894	0,4165	1,29
0,80	6389	7986	1,88	0,94	8786	4028	1,27
0,81	6210	7667	1,78	0,945	8675	3889	1,25
0,82	6032	7356	1,74	0,95	8561	3748	1,24
0,83	5855	7054	1,70	0,955	8442	3603	1,22
0,84	5678	6759	1,67	0,96	8317	3455	1,19
0,85	5500	6470	1,63	0,965	81845	3300	1,16
0,86	5321	6187	1,59	0,97	8044	3138	1,15
0,87	5142	5910	1,55	0,975	2893	2967	1,13
0,88	4961	5637	1,51	0,98	2725	2781	1,11
0,89	4777	5367	1,47	0,985	2554	2573	1,09
0,90	4590	5100	1,43	0,99	2306	2329	1,07
0,905	4495	4967	1,40	0,995	1994	2004	1,04
0,91	4399	4884	1,38	0,996	1911	1919	1,03
0,915	4301	4701	1,36	0,997	1818	1818	1,03
0,92	4202	4568	1,34	0,998	1683	1686	1,01
0,925	4101	4434	1,33	0,999	1518	1515	1,00
0,93	3999	4300	1,31	0,9995	1370	1371	1,00
			1,29				

## Hilfstabelle für Bucherer'sche Theorie.

$\beta$	$u$	$v$	$d v / d u$	$\beta$	$u$	$v$	$d v / d u$
0,50	1,8171	3,6342	3,55	0,80	0,8892	1,1115	1,87
0,52	7312	3294	3,37	0,82	8407	0253	1,78
0,54	6508	0581	3,25	0,84	7920	0,9428	1,69
0,56	5752	2,8129	3,09	0,86	7425	8634	1,60
0,58	5039	5929	2,95	0,88	6918	7861	1,52
0,60	4368	8988	2,82	0,90	6388	7097	1,44
0,62	3721	2130	2,69	0,91	6110	6714	1,38
0,64	3108	0481	2,57	0,92	5821	6327	1,34
0,66	2522	1,8972	2,46	0,93	5517	5938	1,30
0,68	1957	7584	2,35	0,94	5194	5526	1,26
0,70	1413	6305	2,25	0,95	4845	5100	1,22
0,72	9888	5121	2,15	0,96	4458	4644	1,18
0,74	0374	4019	2,05	0,97	4017	4142	1,14
0,76	0,9872	2990	1,98	0,98	3478	3549	1,10
0,78	9380	2026	1,87	0,99	2737	2765	1,06

Bonn, den 1. Januar 1906.

(Eingegangen 3. Januar 1906.)

Annalen der Physik. IV. Folge. 19.

Dissertationen  
der  
Technischen Universität  
zu Berlin  
Fakultät für  
Maschinenbau  
und  
Wasserbau  
Von  
W. Seitz  
Über  
die Wirkung eines unendlich langen Metallzylinders auf Hertzsche Wellen. II;

von  
W. Seitz.

Diese Frage habe ich vor einiger Zeit theoretisch behandelt<sup>1)</sup> und eine größere Anzahl numerischer Beispiele berechnet. Durch eine Arbeit des Hrn. v. Ignatowsky<sup>2)</sup> über dasselbe Thema wurde ich kürzlich auf zwei Punkte in meinen Untersuchungen aufmerksam gemacht, welche einer Berichtigung bedürfen.

Als Lösung der Differentialgleichung (IV) (vgl. l. c. p. 748, die elektrische Kraft parallel der Drahtachse)

$$(IV) \quad \frac{e\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \varphi^2}$$

gab ich an:

$$(VI) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= e^{i n t} \left[ \sum_0^{\infty} a_m K_m(p_1) \cos m \varphi \right. \\ &\quad \left. + M(J_0(p_1) + 2 \sum_1^{\infty} i^m J_m(p_1) \cos m \varphi) \right] \end{aligned} \right.$$

für den Außenraum, dagegen

$$\mathfrak{E} = e^{i n t} \sum_0^{\infty} b_m J_m(p_2) \cos m \varphi$$

für den Draht selbst. Die Konstanten  $a_m$  und  $b_m$  berechnen sich aus den für die Oberfläche des Drahtes gültigen Grenzbedingungen.

Die einfallende ebene Welle ist durch

$$e^{i n t} M(J_0(p_1) + 2 \sum_1^{\infty} i^m J_m(p_1) \cos m \varphi)$$

dargestellt, die vom Draht ausgehenden Reflexionswellen durch

$$e^{i n t} \sum a_m K_m(p_1) \cos m \varphi.$$

1) W. Seitz, Ann. d. Phys. 16. p. 746—772. 1905. In betreff der Ableitung der Formeln und der Bedeutung der einzelnen Zeichen muß auf diese Arbeit verwiesen werden.

2) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 495—523. 1905.

$J$  ist die Besselsche Funktion erster Art,  $K$  die zweiter Art. Als Besselsche Funktionen zweiter Art werden sehr verschiedene Ausdrücke bezeichnet, welche sämtlich zweite partikuläre Integrale derselben Differentialgleichung sind, und die Frage, welcher in einem speziellen Falle zu wählen ist, wird durch sein Verhalten für unendlich großes Argument entschieden.

Ich setzte<sup>1)</sup> nach E. Heine (Handb. d. Kugelfunktionen 1. Bd. Gleichung (44f))

$$(XII) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_0(p_1) = J_0(p_1) \left( \ln \frac{2}{p_1} + 0,5772157 \right) \\ \quad - 2(J_2(p_1) - \frac{1}{2}J_4(p_1) + \frac{1}{2}J_6(p_1) \dots) \end{array} \right.$$

Doch enthält diese Formel einen Druckfehler, der sich außer bei mir auch bei Sommerfeld<sup>2)</sup> und in einer mir bisher leider unbekannten Arbeit von J. J. Thomson<sup>3)</sup> wiederfindet, worauf schon vor Ignatowsky A. Gray<sup>4)</sup> und Sommerfeld<sup>5)</sup> hingewiesen haben; es muß nämlich an Stelle von  $+0,577\dots$  heißen  $-0,577\dots$

Für sehr großes reelles Argument verschwindet dieses  $K_0$  wie

$$\sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} \cos\left(p_1 + \frac{\pi}{4}\right).$$

Wenn  $K$ , wie bei Benutzung des Ausdrückes (XII), reell ist, so stellt

$$e^{inx} \sum_0^{\infty} a_m K_m(p_1) \cos m\varphi$$

ein System von stehenden Wellen dar, deren Amplitude in hinreichend großem Abstand vom Drahte wie  $\sqrt{\pi/2p_1}$  abnimmt. Diese Reflexionswellen würden also keine Energie in den unendlichen Raum mit sich fortführen und es käme dem gleich, als würden sie in unendlicher Entfernung nochmals in sich reflektiert. Es entspricht daher diese Lösung nicht vollständig dem gesuchten Problem.

1) W. Seitz, l. c. p. 751. Gleichung (XII).

2) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. p. 245. 1899.

3) J. J. Thomson, Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism p. 263.

4) A. Gray u. G. Mathews, A treatise on Bessel functions. p. 88. London 1885.

5) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 15. p. 677. 1904.

Wenn wir dagegen wie Ignatowsky als zweites partielläres Integral

$$Q = K - i \frac{\pi}{2} J$$

einführen, und die Reflexionswelle durch

$$e^{i\pi t} \sum_0^{\infty} a_m Q_m(p_1) \cos m \varphi$$

darstellen, so wird damit der Aufgabe genügt; denn für sehr großes Argument ist

$$Q_m = i^m \sqrt{\frac{\pi}{2 p_1}} e^{-i(p_1 + \frac{\pi}{4})}.$$

Die einzelnen Summanden, aus denen die ganze Reflexionswelle zusammengesetzt ist, bedeuten dann fortschreitende Wellen, welche sich vom Drahte entfernen und wie  $\sqrt{\pi/2} p_1$  in unendlich großem Abstand vom Drahte verschwinden.<sup>1)</sup>

Im folgenden sind die numerischen Rechnungen meiner ersten Arbeit wiederholt, wobei aber an die Stelle von  $K_n$

$$Q_n = K_n - i \frac{\pi}{2} J_n$$

gesetzt ist. Selbstverständlich hat jetzt in  $K$  auch die Gaussche Zahl 0,577 . . . , wie oben besprochen, das richtige Vorzeichen. Die ganze Berechnung ist sonst dieselbe wie vorher.

#### Kupferdraht vom Radius 0,1 cm.

Schwingungszahl  $10^9$  pro Sekunde. Wellenlänge in Luft 30 cm.

Infolge des Vorzeichenwechsels der Gauss'schen Konstante 0,5772 . . . ist für  $K_0$  der Wert 3,982 statt 5,135 zu setzen, alle übrigen  $K$  und  $K'$  ändern sich dagegen nicht.

Außerdem tritt an Stelle von  $K_n$  und  $K'_n$

$$Q_n = K_n - i \frac{\pi}{2} J_n \text{ bez. } Q'_n = K'_n - i \frac{\pi}{2} J'_n.$$

Es berechnet sich dann

$$a_0 = -M(0,2173 + i \cdot 0,0858),$$

$$a_1 = M(1,069 \cdot 10^{-6} - 0,0004374),$$

1) Vgl. auch die weitere Begründung bei W. v. Ignatowsky, I. c. p. 496 u. 500.

während  $a_2, a_3$  etc. dieselben Werte wie vorher haben, nämlich:

$$a_2 = M(2,38 \cdot 10^{-8} + 9,82 \cdot 10^{-11} i),$$

$$a_3 = -M(0,272 - 43,6 i) 10^{-14}.$$

Die Werte von  $\mathfrak{E}$  in verschiedenem Abstand von der Drahtachse und für verschiedene  $\varphi$ , sowie die mittlere Energie der Welle in Prozenten der mittleren Energie der ursprünglichen Welle sind nach der neuen Berechnung in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 1.

$r$	$\varphi$	$\mathfrak{E}$	$(A^2 + B^2) \cdot 100$
$r = 0,1 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,02095)$	0	0	0
	$\pi$	0	0
	$\pi/2$	0	0
$r = 0,478 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,1)$	0	$M(0,337 \cos nt - 0,229 \sin nt)$	16,58 %
	$\pi$	$M(0,337 \cos nt - 0,001 \sin nt)$	11,35
	$\pi/2$	$M(0,342 \cos nt - 0,134 \sin nt)$	18,47
$r = 0,956 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,2)$	0	$M(0,4777 \cos nt - 0,3908 \sin nt)$	88,0
	$\pi$	$M(0,4777 \cos nt + 0,0064 \sin nt)$	22,8
	$\pi/2$	$M(0,4976 \cos nt - 0,1922 \sin nt)$	28,4
$r = 1,912 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,4)$	0	$M(0,5851 \cos nt - 0,6857 \sin nt)$	74,8
	$\pi$	$M(0,5851 \cos nt + 0,1481 \sin nt)$	36,2
	$\pi/2$	$M(0,6640 \cos nt - 0,2463 \sin nt)$	50,0
$r = 4,78 \text{ cm}$ $(p_1 = 1,0)$	0	$M(0,4676 \cos nt - 1,1145 \sin nt)$	146,0
	$\pi$	$M(0,4676 \cos nt + 0,5688 \sin nt)$	54,0
	$\pi/2$	$M(0,9271 \cos nt - 0,2731 \sin nt)$	93,4
$r = 7,17 \text{ cm}$ $(p_1 = 1,5)$	0	$M(0,1314 \cos nt - 1,2240 \sin nt)$	151,7
	$\pi$	$M(0,1314 \cos nt + 0,7712 \sin nt)$	61,0
	$\pi/2$	$M(1,0616 \cos nt - 0,2264 \sin nt)$	117,8
$r = 9,56 \text{ cm}$ $(p_1 = 2,0)$	0	$M(-0,2719 \cos nt - 1,0536 \sin nt)$	118,0
	$\pi$	$M(-0,2719 \cos nt + 0,7632 \sin nt)$	65,5
	$\pi/2$	$M(1,1441 \cos nt - 0,1452 \sin nt)$	133,0
$r = 11,95 \text{ cm}$ $(p_1 = 2,5)$	0	$M(-0,6243 \cos nt - 0,6495 \sin nt)$	81,0
	$\pi$	$M(-0,6243 \cos nt + 0,5485 \sin nt)$	69,0
	$\pi/2$	$M(1,1765 \cos nt - 0,0505 \sin nt)$	188,7

Tabelle 1 (Fortsetzung).

$r$	$\varphi$	$E$	$(A^2 + B^2) \cdot 100$
$r = 14,34 \text{ cm}$ $(p_1 = 3)$	0	$M(-0,8262 \cos n t - 0,1085 \sin n t)$	69,3 %
	$\pi$	$M(-0,8262 \cos n t + 0,1799 \sin n t)$	71,4
	$\pi/2$	$M(1,1637 \cos n t + 0,0382 \sin n t)$	185,7
$r = 16,73 \text{ cm}$ $(p_1 = 3,5)$	0	$M(-0,8209 \cos n t + 0,4544 \sin n t)$	87,8
	$\pi$	$M(-0,8209 \cos n t - 0,2460 \sin n t)$	73,2
	$\pi/2$	$M(1,1158 \cos n t + 0,1042 \sin n t)$	125,6
$r = 19,12 \text{ cm}$ $(p_1 = 4,0)$	0	$M(-0,6039 \cos n t + 0,8943 \sin n t)$	116,2
	$\pi$	$M(-0,6039 \cos n t - 0,6227 \sin n t)$	75,1
	$\pi/2$	$M(1,048 \cos n t + 0,1858 \sin n t)$	111
$r = 21,51 \text{ cm}$ $(p_1 = 4,5)$	0	$M(-0,2261 \cos n t + 1,1135 \sin n t)$	129,1
	$\pi$	$M(-0,2261 \cos n t - 0,8427 \sin n t)$	76,1
	$\pi/2$	$M(0,9818 \cos n t + 0,1854 \sin n t)$	98,0
$r = 23,90 \text{ cm}$ $(p_1 = 5)$	0	$M(0,2028 \cos n t + 1,0610 \sin n t)$	116,6
	$\pi$	$M(0,2028 \cos n t - 0,8566 \sin n t)$	77,5
	$\pi/2$	$M(0,9188 \cos n t + 0,1022 \sin n t)$	85,2
$r = 26,29 \text{ cm}$ $(p_1 = 5,5)$	0	$M(0,5934 \cos n t + 0,7539 \sin n t)$	91,8
	$\pi$	$M(0,5934 \cos n t - 0,6579 \sin n t)$	78,4
	$\pi/2$	$M(0,8851 \cos n t + 0,0480 \sin n t)$	78,4
$r = 28,68 \text{ cm}$ $(p_1 = 6)$	0	$M(0,8412 \cos n t + 0,2681 \sin n t)$	78,0
	$\pi$	$M(0,8412 \cos n t - 0,2933 \sin n t)$	79,4
	$\pi/2$	$M(0,8814 \cos n t - 0,0126 \sin n t)$	77,5
$r = 33,48 \text{ cm}$ $(p_1 = 7)$	0	$M(0,7042 \cos n t - 0,7560 \sin n t)$	106,5
	$\pi$	$M(0,7042 \cos n t + 0,5586 \sin n t)$	80,5
	$\pi/2$	$M(0,9507 \cos n t - 0,0987 \sin n t)$	91,1
$r = 38,24 \text{ cm}$ $(p_1 = 8)$	0	$M(0,0976 \cos n t - 1,0773 \sin n t)$	116,7
	$\pi$	$M(0,0976 \cos n t + 0,8999 \sin n t)$	82,0
	$\pi/2$	$M(1,0531 \cos n t - 0,0887 \sin n t)$	111,8
$r = 43,02 \text{ cm}$ $(p_1 = 9)$	0	$M(-0,8139 \cos n t - 0,4144 \sin n t)$	83,2
	$\pi$	$M(-0,8139 \cos n t + 0,4086 \sin n t)$	82,6
	$\pi/2$	$M(1,0975 \cos n t - 0,0029 \sin n t)$	120,2
$r = 47,8 \text{ cm}$ $(p_1 = 10)$	0	$M(-0,7866 \cos n t + 0,6210 \sin n t)$	100,4
	$\pi$	$M(-0,7866 \cos n t - 0,4682 \sin n t)$	83,7
	$\pi/2$	$M(1,0521 \cos n t + 0,0764 \sin n t)$	111,1

Der Verlauf der Energie der Wellen bei verschiedenem Abstand vom Drahte und für die Winkel  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  und  $\varphi = \pi$  ist am besten aus nachstehendem Kurvendiagramm (Fig. 1)

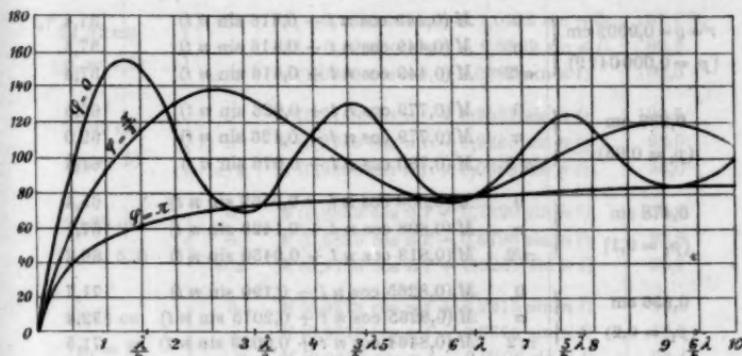


Fig. 1.

zu ersehen. Ordinate ist die Energie in Prozenten der unveränderten, einfallenden Welle, die Abszisse bildet  $p_1$ , d. i. der Abstand von der Achse, gerechnet in Wellenlängen und multipliziert mit  $2\pi$ .

Nach der Rückseite übt der Draht eine Schirmwirkung aus. Die Intensität dieses Schattens nimmt kontinuierlich mit der Entfernung ab. Für  $\varphi = \pi$  und  $\varphi = \pi/2$  bilden die reflektierten mit den einfallenden ebenen Wellen stehende Wellen.

Platindraht vom Radius 0,0002 cm.

Schwingungszahl  $10^9$  pro Sekunde. Wellenlänge in Luft 30 cm.

Nach Anbringung der Korrektion ist  $K_0 = 10,20$  statt 11,35, während  $K_1$ ,  $K_3$ ,  $K'_0$ ,  $K'_1$  etc. unverändert bleiben.

Es berechnet sich

$$a_0 = -M(0,04665 + 0,04797i),$$

$$a_1 = M(0,46328 - 0,0873i) \cdot 10^{-10}.$$

Die Werte von  $\mathfrak{E}$  und der mittleren Energie sind auch hier in einer Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 2.

$r$	$\varphi$	$G$	$A^2 + B^2$
$r = \varrho = 0,0002 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,0000419)$	0	$M(0,449 \cos nt + 0,416 \sin nt)$	37,4 %
	$\pi$	$M(0,449 \cos nt + 0,416 \sin nt)$	37,4
	$\pi/2$	$M(0,449 \cos nt + 0,416 \sin nt)$	37,4
$0,239 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,05)$	0	$M(0,779 \cos nt + 0,026 \sin nt)$	60,5
	$\pi$	$M(0,779 \cos nt + 0,126 \sin nt)$	62,0
	$\pi/2$	$M(0,780 \cos nt + 0,076 \sin nt)$	61,4
$0,478 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,1)$	0	$M(0,808 \cos nt - 0,0569 \sin nt)$	65,4
	$\pi$	$M(0,808 \cos nt + 0,1429 \sin nt)$	67,1
	$\pi/2$	$M(0,813 \cos nt + 0,0480 \sin nt)$	66,2
$0,956 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,2)$	0	$M(0,8265 \cos nt - 0,190 \sin nt)$	71,7
	$\pi$	$M(0,8265 \cos nt + 0,2075 \sin nt)$	72,4
	$\pi/2$	$M(0,8464 \cos nt + 0,0089 \sin nt)$	71,5
$1,912 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,4)$	0	$M(0,8048 \cos nt - 0,4141 \sin nt)$	81,7
	$\pi$	$M(0,8048 \cos nt + 0,3847 \sin nt)$	77,9
	$\pi/2$	$M(0,8832 \cos nt - 0,0247 \sin nt)$	78,0
$4,78 \text{ cm}$ $(p_1 = 1,0)$	0	$M(0,4894 \cos nt - 0,9040 \sin nt)$	105,6
	$\pi$	$M(0,4894 \cos nt + 0,7788 \sin nt)$	84,4
	$\pi/2$	$M(0,9489 \cos nt - 0,0626 \sin nt)$	90,3
$7,17 \text{ cm}$ $(p_1 = 1,5)$	0	$M(0,0593 \cos nt - 1,0639 \sin nt)$	113,9
	$\pi$	$M(0,0593 \cos nt + 0,9813 \sin nt)$	87,1
	$\pi/2$	$M(0,9895 \cos nt - 0,0668 \sin nt)$	98,1
$9,56 \text{ cm}$ $(p_1 = 2)$	0	$M(-0,3954 \cos nt - 0,9632 \sin nt)$	108,3
	$\pi$	$M(-0,3954 \cos nt + 0,8536 \sin nt)$	88,4
	$\pi/2$	$M(1,0206 \cos nt - 0,0548 \sin nt)$	104,4
$11,95 \text{ cm}$ $(p_1 = 2,5)$	0	$M(-0,7608 \cos nt - 0,6328 \sin nt)$	97,9
	$\pi$	$M(-0,7608 \cos nt + 0,5652 \sin nt)$	89,8
	$\pi/2$	$M(1,0400 \cos nt - 0,0888 \sin nt)$	108,2
$14,34 \text{ cm}$ $(p_1 = 3)$	0	$M(-0,9427 \cos nt - 0,1510 \sin nt)$	91,1
	$\pi$	$M(-0,9427 \cos nt + 0,1324 \sin nt)$	90,6
	$\pi/2$	$M(1,0472 \cos nt - 0,0098 \sin nt)$	109,5
$16,73 \text{ cm}$ $(p_1 = 3,5)$	0	$M(-0,8942 \cos nt + 0,3639 \sin nt)$	93,1
	$\pi$	$M(-0,8942 \cos nt - 0,3865 \sin nt)$	91,2
	$\pi/2$	$M(1,0425 \cos nt + 0,0137 \sin nt)$	108,5
$19,12 \text{ cm}$ $(p_1 = 4)$	0	$M(-0,6230 \cos nt + 0,7889 \sin nt)$	100,8
	$\pi$	$M(-0,6230 \cos nt - 0,7281 \sin nt)$	91,7
	$\pi/2$	$M(1,0287 \cos nt + 0,0304 \sin nt)$	105,6

Tabelle 2 (Fortsetzung).

$r$	$\varphi$	$E$	$A^2 + B^2$
21,51 cm ( $p_1 = 4,5$ )	0	$M(-0,1980 \cos nt + 1,0168 \sin nt)$	107,1 %
	$\pi$	$M(-0,1980 \cos nt - 0,9399 \sin nt)$	92,1
	$\pi/2$	$M(1,0099 \cos nt + 0,0882 \sin nt)$	102,0
28,90 cm ( $p_1 = 5$ )	0	$M(0,2748 \cos nt + 0,9951 \sin nt)$	106,5
	$\pi$	$M(0,2748 \cos nt - 0,9225 \sin nt)$	92,5
	$\pi/2$	$M(0,9908 \cos nt + 0,0868 \sin nt)$	98,0
28,29 cm ( $p_1 = 5,5$ )	0	$M(0,6889 \cos nt + 0,7820 \sin nt)$	100,0
	$\pi$	$M(0,6889 \cos nt - 0,6798 \sin nt)$	92,8
	$\pi/2$	$M(0,9756 \cos nt + 0,0261 \sin nt)$	95,1
28,68 cm ( $p_1 = 6$ )	0	$M(0,9273 \cos nt + 0,2915 \sin nt)$	94,5
	$\pi$	$M(0,9273 \cos nt - 0,2699 \sin nt)$	93,3
	$\pi/2$	$M(0,9675 \cos nt + 0,0108 \sin nt)$	93,4

Der Inhalt der letzten Kolumne der Tabelle ist durch folgende Kurven dargestellt:

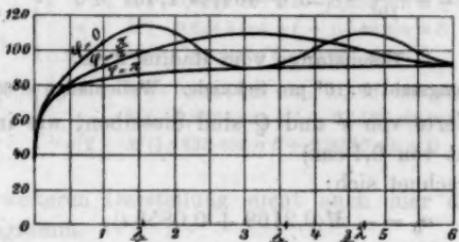


Fig. 2.

Die Berechnung des Energiefusses durch die Oberfläche des Drahtes habe ich ebenfalls wiederholt; doch hat sie sich gegenüber der ersten nicht wesentlich durch die Korrektion verändert.

Nach dem Poyntingschen Satz ist der Energiefuß pro Zentimeter der Länge des Drahtes

$$E = \frac{\rho c}{4\pi} \int_0^{2\pi} E_z H_\varphi d\varphi,$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{H}_\varphi &= -i(a_0 Q_0'(p_1) + a_1 Q_1'(p_1) \cos \varphi + \dots \\
 &\quad + M i \cos \varphi e^{ip_1 \cos \varphi}) e^{int} \\
 &= -iM[(0,04665 + 0,04797i)(2,387 \cdot 10^4 - 1,57 \cdot 0,00002095i) \\
 &\quad + \dots + M i \cos \varphi] e^{int} \\
 &= M[1143 \cos nt + 1114 \sin nt].
 \end{aligned}$$

Sowohl bei  $\mathfrak{H}_\varphi$  wie bei  $\mathfrak{E}_z$  können alle Glieder, welche  $\varphi$  enthalten, vernachlässigt werden, so daß  $\mathfrak{E}_z \cdot \mathfrak{H}_\varphi$  auf der ganzen Oberfläche nahezu konstant ist.

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{e \ell}{2} M^2 (1143 \cos nt + 1114 \sin nt) (0,449 \cos nt + 0,416 \sin nt) \\
 &= M^2 3 \cdot 10^6 (50 \cos^2 nt + 976 \cos nt \sin nt + 464).
 \end{aligned}$$

Während einer Schwingung absorbiert der Draht die Energie menge:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T E dt &= \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} E d(nt) = 3 \cdot 10^6 M^2 \left( \frac{50}{2} \frac{2\pi}{n} + 464 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \\
 &= \frac{3 \cdot 10^6 M^2}{10^6} (25 + 464) = 1,467 M^2.
 \end{aligned}$$

#### Eisenstange vom Radius 2 cm.

Schwingungszahl  $5 \cdot 10^7$  pro Sekunde. Wellenlänge = 600 cm.

Die Werte von  $J$  und  $Q$  sind dieselben, wie im Fall (I). (Kupferdraht von 0,1 cm.)

Es berechnet sich:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -M(0,2169 + 0,0858i), \\
 a_1 &= M(5,06 \cdot 10^{-6} - 4,33 \cdot 10^{-4}i).
 \end{aligned}$$

Die Werte von  $\mathfrak{E}$  und der mittleren Energie sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 3.

$r$	$\varphi$	$\mathfrak{E}$	$A^2 + B^2$
$r = \varrho = 2 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,02095)$	0	$M 0,001 \sin nt$	0,0001 %
	$\pi$	$M 0,001 \sin nt$	0,0001
	$\pi/2$	$M 0,001 \sin nt$	0,0001
$9,54 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,1)$	0	$M (0,887 \cos nt - 0,283 \sin nt)$	16,8
	$\pi$	$M (0,887 \cos nt - 0,0336 \sin nt)$	11,5
	$\pi/2$	$M (0,842 \cos nt - 0,1885 \sin nt)$	18,4

Tabelle 3 (Fortsetzung).

$r$	$\varphi$	$\xi$	$A^2 + B^2$
19,08 cm $(p_1 = 0,2)$	0	$M(0,465 \cos nt - 0,403 \sin nt)$	37,8 %
	$\pi$	$M(0,465 \cos nt - 0,0058 \sin nt)$	21,6
	$\pi/2$	$M(0,485 \cos nt - 0,2042 \sin nt)$	27,7
38,16 cm $(p_1 = 0,4)$	0	$M(0,5858 \cos nt - 0,6358 \sin nt)$	74,5
	$\pi$	$M(0,5858 \cos nt + 0,1485 \sin nt)$	86,4
	$\pi/2$	$M(0,6842 \cos nt - 0,2459 \sin nt)$	49,9
95,4 cm $(p_1 = 1,0)$	0	$M(0,4676 \cos nt - 1,1188 \sin nt)$	146,0
	$\pi$	$M(0,4676 \cos nt + 0,5690 \sin nt)$	54,2
	$\pi/2$	$M(0,9271 \cos nt - 0,2724 \sin nt)$	98,8
148,1 cm $(p_1 = 1,5)$	0	$M(0,1811 \cos nt - 1,2286 \sin nt)$	151,7
	$\pi$	$M(0,1811 \cos nt + 0,7716 \sin nt)$	61,0
	$\pi/2$	$M(1,0618 \cos nt - 0,2260 \sin nt)$	117,8
190,8 cm $(p_1 = 2)$	0	$M(-0,2722 \cos nt - 1,0585 \sin nt)$	118,7
	$\pi$	$M(-0,2722 \cos nt + 0,7683 \sin nt)$	65,5
	$\pi/2$	$M(1,1438 \cos nt - 0,1451 \sin nt)$	133,1
238,5 cm $(p_1 = 2,5)$	0	$M(-0,6245 \cos nt - 0,650 \sin nt)$	81,1
	$\pi$	$M(-0,6245 \cos nt + 0,548 \sin nt)$	68,9
	$\pi/2$	$M(1,1763 \cos nt - 0,051 \sin nt)$	138,4
286,2 cm $(p_1 = 3)$	0	$M(-0,8264 \cos nt - 0,1087 \sin nt)$	69,2
	$\pi$	$M(-0,8264 \cos nt + 0,1797 \sin nt)$	71,3
	$\pi/2$	$M(1,1635 \cos nt + 0,0380 \sin nt)$	135,6

Zur weiteren Darstellung dient auch hier das folgende Kurvendiagramm.

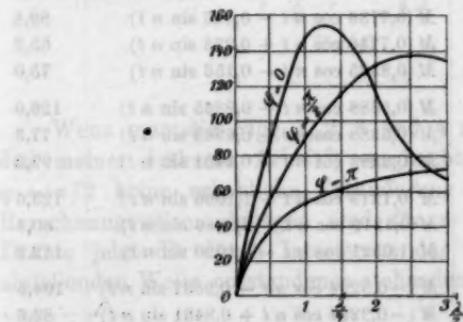


Fig. 3.

Eisenstange vom Radius 2 cm.

Schwingungszahl  $7,82 \cdot 10^4$ . Wellenlänge 38400 cm.

Es ist

$$K_0(p_1) = 8,1403 \text{ (statt } 9,29475\text{), also } Q_0(p_1) = 8,1403 - i \frac{\pi}{2},$$

$$K_1(p_1) = 3060 \text{ und } Q_1(p_1) = 3060 - i \frac{\pi}{2} 1,637 \cdot 10^{-4}.$$

Daraus berechnet sich:

$$a_0 = -M(0,118 + 0,0234 i),$$

$$a_1 = M(5,2948 - 101,65 i) \cdot 10^{-9}.$$

Die Werte von  $\xi$  für verschiedenes  $r$  sind wie im vorhergehenden berechnet und in Tab. 4 zusammengestellt.

Tabelle 4.

$r$	$\varphi$	$\xi$	$A^2 + B^2$
$r = \rho = 2 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,0003274)$	0	$M(0,0027 \cos nt + 0,0054 \sin nt)$	0,0029 %
	$\pi$	$M(0,0027 \cos nt + 0,0048 \sin nt)$	0,0023
	$\pi/2$	$M(0,0027 \cos nt + 0,0051 \sin nt)$	0,0026
$806 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,05)$	0	$M(0,595 \cos nt - 0,162 \sin nt)$	88,0
	$\pi$	$M(0,595 \cos nt - 0,063 \sin nt)$	35,8
	$\pi/2$	$M(0,596 \cos nt - 0,1125 \sin nt)$	36,8
$612 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,1)$	0	$M(0,674 \cos nt - 0,228 \sin nt)$	50,8
	$\pi$	$M(0,674 \cos nt - 0,0287 \sin nt)$	45,5
	$\pi/2$	$M(0,679 \cos nt - 0,1285 \sin nt)$	47,6
$1224 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,2)$	0	$M(0,7435 \cos nt - 0,3424 \sin nt)$	66,8
	$\pi$	$M(0,7435 \cos nt + 0,0548 \sin nt)$	55,4
	$\pi/2$	$M(0,7634 \cos nt - 0,1438 \sin nt)$	60,2
$2448 \text{ cm}$ $(p_1 = 0,4)$	0	$M(0,7736 \cos nt - 0,545 \sin nt)$	89,4
	$\pi$	$M(0,7736 \cos nt + 0,283 \sin nt)$	65,2
	$\pi/2$	$M(0,8525 \cos nt - 0,156 \sin nt)$	75,0
$6120 \text{ cm}$ $(p_1 = 1,0)$	0	$M(0,5888 \cos nt - 0,9865 \sin nt)$	126,0
	$\pi$	$M(0,5888 \cos nt + 0,6968 \sin nt)$	77,8
	$\pi/2$	$M(0,9888 \cos nt - 0,1451 \sin nt)$	99,8
$9180 \text{ cm}$ $(p_1 = 1,5)$	0	$M(0,1219 \cos nt - 1,1066 \sin nt)$	123,6
	$\pi$	$M(0,1219 \cos nt + 0,8886 \sin nt)$	80,4
	$\pi/2$	$M(1,0521 \cos nt - 0,1090 \sin nt)$	112,2
$12240 \text{ cm}$ $(p_1 = 2,0)$	0	$M(-0,3294 \cos nt - 0,9687 \sin nt)$	104,5
	$\pi$	$M(-0,3294 \cos nt + 0,8481 \sin nt)$	82,6
	$\pi/2$	$M(1,0864 \cos nt - 0,0603 \sin nt)$	118,4

Tabelle 4 (Fortsetzung).

$r$	$\varphi$	$E$	$A^2 + B^2$
15300 cm ( $p_1 = 2,5$ )	0	$M(-0,7066 \cos nt - 0,6083 \sin nt)$	86,8 %
	$\pi$	$M(-0,7066 \cos nt + 0,5897 \sin nt)$	84,5
	$\pi/2$	$M(1,0942 \cos nt - 0,0098 \sin nt)$	119,8
18360 cm ( $p_1 = 3$ )	0	$M(0,9104 \cos nt - 0,1073 \sin nt)$	83,9
	$\pi$	$M(0,9104 \cos nt + 0,1761 \sin nt)$	85,9
	$\pi/2$	$M(1,0795 \cos nt + 0,0844 \sin nt)$	116,8
24480 cm ( $p_1 = 4$ )	0	$M(-0,6408 \cos nt + 0,8827 \sin nt)$	100,2
	$\pi$	$M(-0,6408 \cos nt - 0,6848 \sin nt)$	87,6
	$\pi/2$	$M(1,0114 \cos nt + 0,0742 \sin nt)$	102,7
27540 cm ( $p_1 = 4,5$ )	0	$M(-0,2322 \cos nt + 1,0450 \sin nt)$	114,6
	$\pi$	$M(-0,2322 \cos nt - 0,9112 \sin nt)$	88,4
	$\pi/2$	$M(0,9757 \cos nt + 0,0669 \sin nt)$	95,6

Der Inhalt der letzten Kolumne ist durch Fig. 4 graphisch dargestellt.

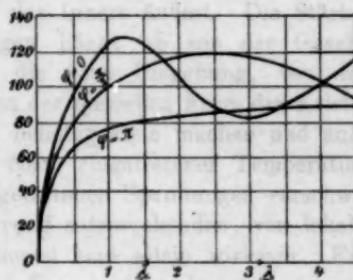


Fig. 4.

Wenn man die Figg. 1, 2, 3 und 4 mit den entsprechenden meiner früheren Arbeit<sup>1)</sup> vergleicht, so ergibt sich für  $\varphi = \pi/2$  keine erhebliche Veränderung infolge der anderen Berechnungsweise, dagegen sind für  $\varphi = 0$ , also von dem Drahte jetzt die durch Interferenz der reflektierten mit der einfallenden Welle entstandenen stehenden Wellen von größerer

1) I. c.

Intensität, während der Draht nach hinten, d. i. für  $\varphi = \pi$ , einen Schatten wirft, dessen Tiefe asymptotisch mit der Entfernung abnimmt.

*Die Berechnungen, welche sich auf den Fall beziehen, daß die Schwingungen der elektrischen Kraft senkrecht zur Drahtachse erfolgen, brauchten nicht wiederholt zu werden, da ihre Resultate durch die Korrektion keine merkliche Veränderung erleiden. Selbstverständlich muß auch in den hierauf bezüglichen Formeln überall  $Q_m$  an Stelle von  $K_m$  gesetzt werden.*

Würzburg, Dezember 1905.

(Eingegangen 21. Dezember 1905.)



Deformationen und die elektrische Reaktion am Kristalle ist. Die Deformationen sind analog zu den oben erwähnten, die die Elektrizität erregen, aber sie sind nicht so einheitlich, sondern sie sind vielfach verschiedenartig und unregelmäßig.

#### 4. Beobachtungen über Elektrizitätserregung an Kristallen durch nicht homogene und homogene Deformation; von Peter Paul Koch.

##### Erster Teil. Nicht homogene Deformation.

###### Eine unvermeidliche Komplikation bei Untersuchung auf Pyroelektrizität.

Es liegt in der Natur der Sache, daß alle Methoden zur Untersuchung auf Pyroelektrizität das Auftreten lokaler Spannungen im behandelten Kristall bedingen. Das Hineinbringen eines Körpers in eine wärmere oder kältere Umgebung bewirkt eine Deformation der äußeren Partien, die sich in einem Zug oder Druck auf das Innere äußert. Die Stärke und Richtung dieser Spannungen hängt ab von der Geschwindigkeit des Einbringens in die neue Umgebung, von der Temperaturdifferenz und von der speziellen Form des Kristalls. Sie lassen sich theoretisch beliebig klein machen und auf beliebig lange Zeit verteilen. Nach eingetretener Temperaturngleichheit sind die anfangs aufgetretenen Spannungen verschwunden, die der Temperaturänderung entsprechenden, von lokalen Spannungen freien Deformationen sind allein wirksam. Eine quantitative Messung des bei Temperaturänderungen erregten elektrischen Momentes muß sich auf diesen thermischen Zustand beziehen.

Die Untersuchungsmethoden auf Pyroelektrizität<sup>1)</sup> unterscheiden sich hinsichtlich des erwähnten störenden Einflusses nur quantitativ. Von den bekannteren verfährt, wie es scheint,

1) D. Brewster, Pogg. Ann. 2. p. 297. 1824; F. Köhler, Pogg. Ann. 17. p. 146. 1829; P. Ermann, Pogg. Ann. 25. p. 607. 1832; G. Rose, Pogg. Ann. 39. p. 285. 1836; P. Rieß u. G. Rose, Pogg. Ann. 59. p. 553. 1843; W. Hankel, Pogg. Ann. 49. p. 493. 1840; 74. p. 231. 1848; M. Ch. Friedel, Bullet. de la Soc. minéral. de France 2. p. 81. 1879; A. Kundt, Wied Ann. 20. p. 592. 1888.

die Kundtsche Bestäubungsmethode am wenigsten inhomogen. Das zu bestäubende Objekt kühlt sich, nachdem es vorher im Luftbad erhitzt wurde, in freier Luft ab. Daß auch hier noch Spannungen der geschilderten Art unter Umständen sogar die Hauptrolle spielen können, beweist das Verhalten des Quarzes. Nach der von Voigt<sup>1)</sup> entwickelten allgemeinen Theorie der pyro- und piezoelektrischen Erscheinungen kann der Quarz bei einer gleichmäßigen Temperaturänderung zufolge seiner Symmetrie keine elektrische Erregung zeigen und zeigt sie in der Tat nicht bei hydrostatischen Druckänderungen (vgl. unten im zweiten Teil), die einer solchen Temperaturänderung in bezug auf Homogenität völlig äquivalent sind. Dagegen ergibt die Bestäubung von in freier Luft sich abkühlenden Quarzen mit dem Schwefelmennigegemisch eine Trennung der Pulver. Noch auffälliger sind die Erscheinungen bei den Versuchen Röntgens<sup>2)</sup> mit Quarzkugel und Quarzylinder. Eine Quarzkugel zeigt beim Abkühlen in freier Luft zuerst die Elektrizität des Erkaltens; wird diese zur Erde geleitet, dann zeigt sich in der zweiten Phase die entgegengesetzte Elektrizität des Erwärmens. Ein Quarzylinder (Zylinderachse parallel zur optischen Achse) zeigt je nach der Art des Erwärmens vom Rande oder von der Mitte aus, am Rande entgegengesetzte Elektrizitäten. Der Grund liegt in allen Fällen in den durch die ungleichförmige Abkühlung bedingten lokalen Spannungen, die das Auftreten von Piezoelektrizität zur Folge haben (Falsche Pyroelektrizität nach Voigt).

Beim Verfahren von Friedel wird überhaupt nur die auf Pyroelektrizität zu untersuchende Stelle erhitzt. Dies geschieht durch direktes Aufsetzen eines halbkugelförmig abgerundeten heißen Metallstückes, das mit einem Branly'schen Elektrometer verbunden ist. Bei oberflächlicher Betrachtung sieht es aus, als ob das Verfahren besonders ungleichförmige Temperaturänderungen und damit Spannungen im Kristall bedinge. Daß dies nicht der Fall ist, sondern im wesentlichen Vorgänge wirksam sind, die qualitativ völlig mit denen beim Kundtschen Verfahren übereinstimmen, zeigt

1) W. Voigt, *Abh. Ges. d. Wissensch. Göttingen* **36**. Nr. 2. 1890.

2) W. C. Röntgen, *Wied. Ann.* **19**. p. 513. 1883.

die Gleichartigkeit der mit beiden Methoden gewonnenen Resultate.

In bezug auf die Ergebnisse weicht einzig das Verfahren von Hankel von allen anderen ab. Hankel umhüllt den Kristall bis auf die in Betracht kommende Stelle mit Eisenfeilicht. Der freien Stelle gegenüber steht ein dicker Platin-draht, der mit einem Hankelschen Elektrometer verbunden ist. Erhitzt wird die Schale mit dem Kristall durch einen untergesetzten Spiritusbrenner.

Über die von allen anderen abweichenden Ergebnisse der Hankelmethode besonders an Quarzkristallen existiert eine sehr umfangreiche Literatur<sup>1)</sup>. Geklärt wurde die Sachlage durch die Arbeiten von Friedel und Curie, die den Nachweis erbrachten, daß das Hankelsche Verfahren gleichfalls eine ungleichförmige Erwärmung der untersuchten Objekte bedingt und daß die Abweichungen von den anderen Methoden in der Art der auftretenden Ungleichförmigkeiten ihre ungewogene Erklärung finden.

#### *Eine neue Methode zur Untersuchung auf Pyroelektrizität.*

Die im folgenden beschriebene Methode wurde ausgearbeitet, um den Einfluß der besprochenen ungleichförmigen Erwärmung bei pyroelektrischen Untersuchungen<sup>2)</sup> besonders am Quarz eingehender zu verfolgen. Sie erregt die Elektrizität nach einem Vorschlag Röntgens<sup>3)</sup> durch Aufblasen heißer Luft.

Zur Herstellung der erhitzten Luft wurden zylindrische

1) W. Hankel, Pogg. Ann. 50. p. 605. 1840; 131. p. 621. 1867; M. Ch. Friedel, Bull. de la Soc. minér. de France. 2. p. 31. 1879; W. Hankel, Wied. Ann. 10. p. 618. 1880; 13. p. 640. 1881; 17. p. 163. 1882; C. Friedel u. S. Curie, Compt. rend. 96. p. 1262 u. 1889. 1883; W. C. Röntgen, Wied. Ann. 19. p. 513. 1883; W. Hankel, Wied. Ann. 19. p. 818. 1883; A. Kundt, Wied. Ann. 20. p. 592. 1883; B. v. Kolenko, Zeitschr. f. Kryst. u. Miner. 9. p. 1. 1884; W. Hankel, Wied. Ann. 26. p. 150. 1885; B. v. Kolenko, Wied. Ann. 29. p. 416. 1886; W. C. Röntgen, Wied. Ann. 39. p. 16. 1890; J. Beckenkamp, Zeitschr. f. Kryst. u. Miner. 30. p. 321. 1899; 32. p. 9. 1901.

2) Pyroelektrizität nenne ich hier wie im folgenden die durch die Methode entwickelte Elektrizität, auch wenn sie sich als falsche Pyroelektrizität Voigtscher Definition ausweist.

3) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 19. p. 513. 1883.

Glasröhren benutzt (Fig. 1, *H*) von ca. 6—8 cm Länge, die an der einen Seite in eine ca. 4 cm lange Spitze mit enger Öffnung (ca. 0,5—0,6 mm im Lichten) ausliefen. Der Durchmesser der Röhren betrug an dem hinteren weiten Ende 12—15 mm im Lichten. Sie waren dort durch einen durchbohrten Kork geschlossen. Durch die Bohrung war ein Glasröhrenchen gesteckt und auf dieses aufgeschoben der Schlauch eines kleinen Doppelgebläses, wie man sie bei Holzbrenn-

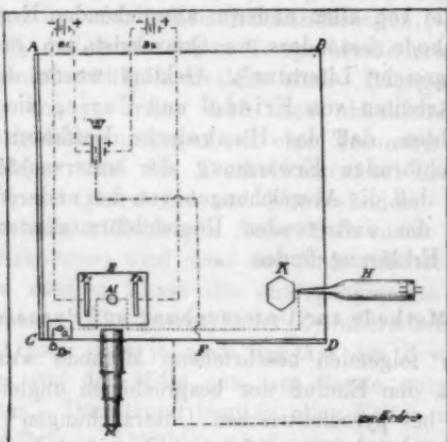


Fig. 1.

apparaten benutzt. Der Durchmesser der Gebläsekugeln betrug ca. 35 mm. Durch einen Druck auf das Gebläse wurde die durch einen unter die Glasröhre gesetzten Spiritusbrenner erhitzte Luft zum raschen Ausströmen durch die Öffnung der Spitze gebracht.

Der Spitze der Heizröhre gegenüber wurde der zu untersuchende Kristall (*K* Fig. 1) so aufgestellt, daß die Spitze den Kristall nicht direkt berührte. Außerdem war dafür Sorge zu tragen, daß die zu erregende Fläche oder Kante, um stets gleiche Bedingungen zu haben, von dem Luftstrom senkrecht getroffen wurde. Im Fall einer Kante mußte die Blasspitze außerdem den Kantenwinkel halbieren. Um jede Stelle eines beliebigen Kristalls rasch in der erforderlichen Art der Spitze

gegenüber bringen zu können wurde, er in ein Kugelgelenkstativ gespannt.

Um die erregte Elektrizität zu beobachten, wurde die Spitze, durch die die erhitzte Luft auf den Kristall strömte, auf einige Millimeter Länge platiniert. An die Platinierung wurde ein dünner Draht gelötet (in der Figur punktiert), der direkt zum Aluminiumblättchen (Al) des Hankelschen Elektrometers ( $E$ )<sup>1)</sup> führte. Die erregte Elektrizität wirkt durch Influenz auf die Spitze und das Elektrometer. Die Platinierung der Spitze soll nicht zu groß sein und die Spitze selbst sehr nahe am Kristall stehen, damit möglichst engbegrenzte Gebiete am Kristall auf die Spitze influenzierend wirken. Dann soll die Öffnung, aus der die Luft austritt, von einem Rande ohne Höcker umgrenzt sein, weil sonst die Stellen am Kristall, die dem Höcker gegenüberstehen, stärker influenzierend wirken, als ihnen zukommt. Schließlich ist darauf zu achten, daß die Platinierung nicht von Rissen und Sprüngen durchsetzt ist, die eine gut leitende Verbindung mit dem Elektrometer verhindern.

Die Elektrometerplatten  $P_1$   $P_2$  wurden auf etwa 60 Volt geladen. Die Ablesung der Einstellung des Aluminiumblättchens erfolgte durch das Mikroskop ( $M$ ) mit Okularskala.

Die Empfindlichkeit betrug gewöhnlich 50 Skt. für 1 Volt, konnte jedoch bis ca. 200 Skt. für 1 Volt gesteigert werden. Das Blättchen des Elektrometers stand in leitender Verbindung mit einem Quecksilbernapf ( $Q$ ). Durch Eintauchen eines geerdeten Drahtes  $Dr$  in diesen Napf wurde das Aluminiumblättchen an die Erde gelegt. Die Verwendung eines Hankelschen Elektrometers zu den im folgenden beschriebenen Untersuchungen ist wegen seiner geringen Kapazität und der aperiodischen Einstellung von besonderem Vorteil. Die ganze Anordnung war elektrostatisch geschützt durch den geerdeten, mit zwei Türen ( $AC$  und  $FD$ ) versehenen Drahtkäfig ( $ABCD$ ).

Durch Kontrollversuche kann man feststellen, daß in sehr seltenen Fällen minimale Spuren von Elektrizität auftreten (Größenordnung: wenige Zehntel Skalenteile bei einer Empfindlichkeit von 50 Skt. für 1 Volt) auch beim Beblasen pyroelektrisch nicht erregbarer Substanzen. Pyroelektrizität läßt

1) W. Hankel, Pogg. Ann. 84. p. 28. 1851; Wied. Ann. 2. p. 66. 1877.

sich hiervon leicht unterscheiden. Hebt man nämlich bei der Untersuchung eines pyroelektrischen Kristalls zuerst die Erdleitung auf und läßt dann heiße Luft aufströmen, so erhält man die Elektrizität des Erwärmens; bläst man dagegen zuerst die erhitze Luft auf und unterbricht dann die Erdleitung, so zeigt sich die entgegengesetzte Elektrizität des Erkaltens.

Die so erhaltenen Ausschläge gehen bei Quarz bis zu 50 Skt. bei der eben genannten Empfindlichkeit. Bei Turmalin, Weinsäure, Seignettesalz sind sie noch bedeutend größer.

#### Resultate der Methode rein kristallographisch betrachtet.

Um die Brauchbarkeit der Methode für rein kristallographische Zwecke festzustellen, wurden mit ihr zahlreiche Kristalle von Turmalin, Weinsäure, Seignettesalz, Schwerspat und Quarz auf ihr pyroelektrisches Verhalten untersucht. Ausnahmslos ergibt sich eine völlige Übereinstimmung der so gewonnenen Aufschlüsse mit den Ergebnissen der Bestäubung nach Kundt. Das von Bürker<sup>1)</sup> angegebene Dreipulvergemisch erweist sich dabei als hervorragend brauchbar. Die Übereinstimmung der beiden Verfahren ist von besonderem Interesse bei Kristallen, die ihrem System zufolge überhaupt nur falsche Pyroelektrizität zeigen können. Sie geht z. B. bei Quarzen bis in die feinsten Details der Verwachsungen.

Die Empfindlichkeit der neuen Methode übertrifft bei weitem die Grenze des für die Bestäubung möglichen. Besonders an schlecht isolierenden Kristallen (manche schwarze Turmaline von Norwegen, Warsteiner Quarze), bei denen mit Bestäubung nichts herauszubekommen ist, gestattet das Verfahren die Lage der Pole festzustellen, weil es die Elektrizität im Moment des Auftretens beobachten läßt. Auch für die Aufsuchung der Pole an sehr kleinen Kristallen ist das Verfahren geeignet. Gegenüber der Friedelschen Methode ist die bedeutende Einfachheit und Zeitersparnis beim Arbeiten hervorzuheben.

#### Anwendung der Methode auf den Quarz. Feststellung der Feldergrenzen.

Bei der Feststellung des Feldgrenzenverlaufs entgegengesetzt elektrischer Gebiete an Quarzkristallen ergeben sich

---

1) K. Bürker, Ann. d. Phys. 1. p. 474. 1900.

bemerkenswerte Regelmäßigkeiten. Um Punkte einer Feldgrenze aufzusuchen, führt man den zu untersuchenden Kristall unter den oben genannten Vorsichtsmaßregeln an der Blas spitze vorbei. Punkte einer Feldgrenze äußern sich sehr scharf dadurch, daß an ihnen beim Beblasen keine Elektrizität auftritt. Diese Operation auf den verschiedenen Flächen an allen möglichen Punkten ausgeführt, ergibt durch passende Markierung<sup>1)</sup> ein System von Punkten, die miteinander verbunden die Feldgrenzen liefern. Diese Feldgrenzen sind völlig eindeutig, d. h. man erhält sie bei jedem Versuch bis auf Bruchteile von Millimetern wieder, wenn man nur dafür sorgt, daß die untersuchte Fläche senkrecht steht zur blasenden Spalte. Denn dann sind die Verhältnisse dieselben für das Auftreffen und die Verteilung der erhitzen Luft und für die Influenzwirkung der erregten Elektrizität auf die platierte mit dem Elektrometer verbundene Spalte. Die Entfernung der letzteren von der Fläche ist weniger wesentlich. Dadurch ändert sich nur die Empfindlichkeit.

Sind die Quarzkristalle verwachsen, dann ergeben sich auf die geschilderte Art mit großer Schärfe die Lage und Größe der Verwachsungen. An unverwachsenen Kristallen sind die Verhältnisse naturgemäß übersichtlicher und es zeigt sich für die Feldgrenzen eine abgesprochene Abhängigkeit von der Form der Flächen, auf denen sie verlaufen. Auf den Prismenflächen, soweit sie von parallelen Kanten begrenzt sind, laufen die Grenzen auf der Mitte der Fläche den Kanten parallel. Da, wo eine Prismenfläche von einer Rhomboederfläche geschnitten wird, biegt die Feldgrenze um, so daß sie auch jetzt wieder auf der Mitte der Prismenfläche verläuft. Dagegen üben die Flächen der trigonalen Trapezoeder einen solchen Einfluß nicht oder kaum merklich aus. Ganz analog laufen die Feldgrenzen auf den Rhomboederflächen. Vgl. die Fig. 2 als typisches Beispiel für einen unverwachsenen Quarz.



Fig. 2.

1) Die Markierung erfolgte so, daß zwischen Blaspitze und Kristall ein Stück blaues Durchpauspapier geschoben und dann die Blaspitze gegen den Kristall gedrückt wurde.

Die dicken Punkte sind die direkt bestimmten Punkte der Feldgrenze. Die Trapezoederflächen an Prismenfläche 6, 5 und 2 bewirken kein Umbiegen der Feldgrenze. Dagegen bewirkt die große zwischen 1 und 2 einspringende Rhomboederfläche ein Umbiegen der Feldgrenze im oberen Teil von 1. Die  $\equiv$  Partien wurden beim Abkühlen durch Bestäuben mit Schwefelmennige rot, die  $\mp$  Partien gelb. Die  $\pm$  Zeichen beziehen sich aufs Erwärmen.

Richtung und Stärke der durch Aufblasen erhitzter Luft veranlaßten Spannungen. Erklärung des Feldgrenzenverlaufs. Weitere Beobachtungen.

Mit der Töplerschen Schlierenmethode kann man feststellen, daß unter den angeführten Bedingungen die von der ausgetriebenen heißen Luft bestrichenen Flächen ziemlich groß sind und ihr Durchmesser kaum unter 6—7 mm heruntergeht. Bei nicht zu großen Kristallflächen, langsamem Drücken auf den Ball des Doppelgebläses und mittlerem Abstand der Blas spitze wird die ganze Fläche von der heißen Luft umhüllt. Die dadurch hervorgerufenen lokalen Deformationen und damit verbundenen Spannungen lassen sich nach Richtung und annähernd nach Stärke feststellen mit Hilfe der dabei auftretenden Doppelbrechung, kombiniert mit der bekannten eines geprästen Glasstreifens. Quarz ist dabei wegen der Schwäche der Erscheinung (gutes Wärmeleitvermögen, daher rascher Ausgleich der Spannungen) und der natürlichen Doppelbrechung weniger geeignet als passend zugeschnittene Glaspräparate. Ganz allgemein zeigt sich, daß Richtung und Stärke von Spannungen in der Umgebung der erhitzen Stelle abhängt von der Massenverteilung, derart, daß die Spannungen sich stärker ausbilden nach der Richtung hin, wo sich weniger Masse befindet. Erhitzt man die Mitte einer Fläche, dann zeigt sich an der Stelle der Spitze direkt gegenüber eine Spannung senkrecht zur Begrenzungsebene. Die Teile auf beiden Seiten zeigen Spannungen nach Richtung und Stärke symmetrisch zu der Normalen der erhitzen Fläche im direkt beblasenen Punkt. Beim Erhitzen eines Punktes in der Nähe einer Kante überwiegen die Spannungen nach der Kante zu.

Mit diesen Beobachtungen finden die angeführten Regel-

mäßigkeiten des Feldgrenzenverlaufs am Quarz ihre Erklärung, ohne daß es nötig ist, auf spezielle naheliegende Gründe für die geschilderte Ausbildung der Spannungen einzugehen. Es genügt die Spannungen in einer Ebene senkrecht zur Hauptachse zu betrachten, weil in dieser die elektrischen Achsen liegen.

Erhitzt man einen Punkt in der Mitte einer Prismenfläche, dann fördert die Spannung senkrecht zur Fläche keine Elektrizität, denn sie fällt zusammen mit einer Achse fehlender Piezoelektrizität.<sup>1)</sup> Die auf beiden Seiten symmetrisch zur Flächennormalen gelegenen Spannungen sind gleich stark; sie erzeugen deshalb entgegengesetzt gleiche Elektrizitäten, die sich in ihrer Wirkung auf die Spitze aufheben. Davon, daß in der Tat auf beiden Seiten entgegengesetzte Elektrizitäten entstehen, kann man sich leicht durch Anlegen elektrischer Sonden, die mit dem Elektrometer verbunden sind, überzeugen. Die durch das Erhitzen hervorgerufenen lokalen Deformationen sind sogar stark genug, um an nicht zu großen Kristallen allenthalben Elektrizitäten hervorzurufen. Ein Vergleich dieser Elektrizitäten mit den an denselben Stellen durch direktes Beblasen hervorgerufenen zeigt, daß sie unter Umständen entgegengesetzt sein können, ganz analog wie bei dem Versuche Röntgens am Quarzylinder.

Beim Beblasen von Prismenflächenpunkten, die mehr nach einer Kante zu liegen, überwiegen die Spannungen nach der benachbarten Kante und damit die entsprechende Elektrizität. Daß die Rhomboederflächen dort, wo sie eine Prismenfläche einengen, ein Umbiegen der Feldgrenze veranlassen, die Trapezoederflächen dagegen nicht, röhrt davon her, daß die Rhomboederflächen durch ihr Auftreten die Massenverteilung stark ändern, die Trapezoederflächen nicht.

Sehr stark äußert sich bei Quarzbruchstücken der Einfluß der individuellen Form auf den Verlauf der Feldgrenzen. Es liegen stets Punkte dieser Grenzen da, wo die Spannungen sich zufolge der Massenverteilung so ausbilden, daß die dadurch erregten Elektrizitäten sich in ihrer Wirkung auf die

---

1) *Betr. Definition der „Achse fehlender Piezoelektrizität“*, vgl. C. W. Röntgen, *Wied. Ann.* 18. p. 215. 1883.

platierte, mit dem Elektrometer verbundene Spitze aufheben. Man kann die Art, wie die Feldgrenzen auf nicht zu kleinen unverwachsenen Quarzstücken verlaufen, benutzen, um die Lage der elektrischen Achsen festzustellen, ohne daß eine natürliche Fläche an dem Stücke vorhanden zu sein braucht. Findet man auf irgend einer Fläche eine Feldgrenze und verläuft sie auf der Mitte der Fläche, dann steht entweder eine Achse fehlender Piezoelektrizität auf der Fläche senkrecht oder diese Achse liegt so, daß die Projektion der Normale der Fläche auf der Ebene der Nebenachsen mit einer Achse fehlender Piezoelektrizität zusammenfällt. Da sich die Ebene der Nebenachsen aus den optischen Eigenschaften ergibt, ist die Lage der elektrischen Achsen ermittelt.

Kundt und Blasius<sup>1)</sup> machten darauf aufmerksam, daß Sprünge in Quarzplatten beim Bestäuben stets die umgekehrte Elektrizität zeigen wie die Umgebung. Auch bei der Untersuchung mit Aufblasen heißer Luft zeigt sich dieser Einfluß der Sprünge und zwar so, daß auf der Seite des Sprunges nach der näheren Prismenkante zu eine Elektrizität auftritt entgegengesetzt der der umliegenden Region. Die ursprünglich ohne Sprung vorhanden gewesenen Feldgrenzen sind verschoben. Tiefe Sprünge äußern einen stärkeren Einfluß als flache. Eine Untersuchung der Doppelbrechungserscheinungen an Platten mit Sprüngen zeigt ein Überwiegen der Spannungen nach dem Sprunge zu. Der Sprung wirkt einfach wie eine Kante. Elektrisch muß sich dies in der geschilderten Art äußern.

#### Zweiter Teil. Homogene Deformation.

Sehr einfach gestalten sich die Verhältnisse bei homogener Deformation von Kristallen durch hydrostatischen Druck.

#### Einzelheiten des Untersuchungsapparates. Druckpumpe.

Zur Erzeugung des Druckes diente eine Druckpumpe von Schäffer und Budenberg, Magdeburg-Buckau, die mittels Hebel und Schraube bis 1500 kg/qcm Druck erreichen ließ. Sie trug Verschraubungen, eine zum Ansetzen eines Mano-

---

1) A. Kundt und E. Blasius, Wied. Ann. 28. p. 145. 1886.

meters, eine weitere zum Ansetzen des Kupferverbindungsrohres mit dem Druckzylinder. Als druckübertragende Flüssigkeit diente Paraffinöl, das völlig schwefelfrei sein muß.<sup>1)</sup> Andernfalls werden hineingebrachte Kupferdrähte und Versilberungen sehr rasch angegriffen, wodurch sich die Isolation der eingesetzten Kristalle beinahe momentan bis zu völliger Unbrauchbarkeit verschlechtert.

#### **Druckzylinder und Verschlußstück. Befestigung der Kristalle.**

Der Druckzylinder von Ducretet-Paris hatte ca. 37 mm lichte Weite. Verschlossen wurde er in bekannter Weise mit Verschlußstück und Verschraubung. An das Verschlußstück wurde unten eine Hartgummischeibe von 35 mm Durchmesser und 15 mm Dicke mit Glu marine aufgeklebt. Durch diese Scheibe wurden zwei Kupferdrähte, die Zuleitungen zu den Belegungen des gedrückten Kristalls, durchgesteckt und mit kleinen Kupferkonussen und Glu marine drucksicher eingedichtet. In den Hartgummi eingeschraubt war ein Eisenstift, bestimmt die Kristallhalter zu tragen, entweder eine Hartgummischale oder leicht federnde Hartgummiklemmen von möglichst geringen Dimensionen.

#### **Messung der Elektrizität.**

Die Messung der durch Druckänderung entwickelten Elektrizität erfolgte mit dem im ersten Teil beschriebenen Hankelektrometer in derselben Aufstellungsweise. Das Elektrometer stand in geerdetem Drahtkäfig. Auch Druckzylinder und Druckpumpe waren geerdet, so daß der Kristall und das ganze mit ihm verbundene System elektrostatisch geschützt war, einschließlich der Leitung vom Druckzylinder zum Elektrometer.

#### **Zwei Störungen und ihre Beseitigung.**

Nach Einsetzen des Verschlußstückes ohne Kristall zeigte sich beim Hochpumpen des Druckes, besonders bei höheren Druckwerten, negative Elektrizität, die bei einer Elektrometerempfindlichkeit von 25 Skalenteilen für 1 Volt für eine Druck-

1) Bezugsquelle für das zu den Versuchen benutzte Paraffinöl war Kahlbaum-Berlin.

änderung von 200 kg/qcm bis 40 Skt. Ausschlag bewirkte. Wurde das mit dem Elektrometer verbundene System geerdet und nach aufgehobener Erdleitung der Druck entspannt, dann erhielt man einen etwa gleichgroßen Ausschlag nach der positiven Seite. Die Ausschläge traten auf, wenn man beide durch das Verschlußstück gehende Zuleitungen zum Elektrometer führte oder nur den einen und gleichzeitig den anderen erdete. Als Grund ergab sich, daß das Paraffinöl beim Durchtreiben durch das enge und lange Kupferrohr zwischen Pumpe und Druckzylinder elektrisch wurde und so in den Druckzylinder gelangte. Beim Entspannen des Druckes ging das elektrische Öl wieder in das Zuleitungssrohr zurück. Abhilfe wurde geschaffen durch Umgeben des Kristallträgersystems mit einem geerdeten unten offenen Messingrohr von 35 mm Lichtweite und 18 cm Länge. Die zweite Störung äußerte sich so, daß bei konstantem hohen Druck im Zylinder beim Anlegen des einen Zuleitungsdrahtes an das Elektrometer bei geerdetem anderen das Elektrometer eine stetige Wanderung zeigte, die sich unter Umständen umkehrte, wenn die Zuleitungen vertauscht wurden, Grund: Die Kittungen der Zuleitungen waren nicht absolut dicht. Die minimalsten, dem Auge kaum sichtbaren Spuren von Paraffinöl, die sich den Zuleitungen entlang drücken, genügen für große Elektrometerausschläge. Die entgegengesetzten Ausschläge beim Vertauschen der Zuleitungen treten dann auf, wenn nur die eine Zuleitung undicht ist. Sie verdanken ihre Entstehung teils Leitung, teils Influenz und sind ungleich groß. Mit Hilfe der letzten Eigenschaft kann man genau bestimmen, welche von den beiden Kittungen undicht ist.

#### Die untersuchten Kristalle. Resultate.

Zur Untersuchung kamen ein Quarzzylinder, ein Quarzparallelepiped und ein grüner Turmalin von Brasilien.

*Der Quarzzylinder* hatte einen Durchmesser von 18 mm und eine Höhe von 6 mm. Die Zylinderachse fiel mit der optischen Achse zusammen. Er war von Röntgen<sup>1)</sup> seinerzeit zur Anstellung piezoelektrischer Versuche benutzt und elektrisch ganz unverwachsen. Die sechs Grenzen entgegengesetzt elektri-

---

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 18. p. 534. 1888.

scher Felder, die sich beim Bestäuben oder mit der beschriebenen pyroelektrischen Methode oder auf piezoelektrischem Wege ergaben und die bei allen drei Methoden zusammenfielen, waren durch feine Striche auf dem Zylinderumfang markiert. Der Zylinder wurde versilbert, die Versilberung auf den Basisflächen völlig und an den Feldgrenzen am Zylinderumfang in etwa 2 mm Breite weggeätzt, so daß auf dem Umfang sechs silberbelegte Felder entstanden. An diese wurden mit Woodmetall dünne Kupferdrähte angelötet und je drei zusammengehörige, die bei Temperaturänderungen gleiche Elektrizität ergaben, mit einem Zuleitungsdraht des Verschlußstückes verlötet. Ein Bekleben mit Metallfolien oder ähnlichem wurde vermieden um eine Beeinflussung der durch den hydrostatischen Druck hervorgerufenen homogenen Deformationen durch die Belegungen infolge etwaigen Auftretens lokaler Spannungen möglichst zu verhüten.

So vorbereitet wurde der Zylinder in den Druckraum eingesetzt. Die Isolation genügte bei sorgfältiger Behandlung völlig (Rückgang des Elektrometerausschlages pro Minute 5 Proz.). Wurde die eine Quarzbelegung geerdet, die andere mit dem Elektrometer verbunden, dann erhielt man bei Druckänderungen Ausschläge, die beim Komprimieren und Entspannen entgegengesetzt waren und sich beim Vertauschen der Belegungen umkehrten. Ihre Größenordnung betrug ca. 10 Skt. Ausschlag für 100 kg/qcm Druckänderung. (Empfindlichkeit des Elektrometers 30 Skt. für 1 Volt, Gesamtkapazität des mit dem Elektrometer verbundenen Systems ca. 30 cm.) Die Elektrizität war bei Druckerhöhung die des Erwärmens, beim Entspannen die des Abkühlens. Die Ausschläge verschwanden sehr rasch wieder. Ungefähr 20 Sek. nach Ablauf der Druckänderung stand das Elektrometerblättchen wieder auf dem Nullpunkt. Die Isolation konnte an dem raschen Verschwinden nicht schuld sein. Ein Überschlag mit Hilfe der bekannten Formel von W. Thomson zeigt, daß eine adiabatische Druckänderung von 100 kg/qcm im Paraffinöl eine Temperaturänderung hervorruft, deren Größenordnung etwa 1° C. ist, während sie an Quarz unter denselben Bedingungen einige hunderstel Grad beträgt. Die Folge ist, daß nach der Druckänderung der Quarz sich in einer anders temperierten

Umgebung befindet, also genau unter den Bedingungen, die im ersten Kapitel ausführlich besprochen sind. Es treten lokale Spannungen auf und damit Elektrizitätsentwicklung. Das Verschwinden dieser Spannungen bei eintretendem Temperaturausgleich fördert die zur ersten entgegengesetzte Elektrizität. Das Elektrometer geht auf Null zurück und bleibt dort. Das Annehmen der Zimmertemperatur von Quarz und Paraffinöl gemeinsam fördert keine Elektrizität, weil der Temperaturausgleich zu langsam erfolgt (in ca. 30 Minuten vgl. unten), um elektrisch merkliches Auftreten lokaler Spannungen zu gestatten.

Die homogene Deformation des Quarzylders durch hydrostatischen Druck an sich nach Ausschaltung der Wärmevorgänge liefert somit keine Elektrizität, die mit den benutzten Meßmitteln wahrnehmbar ist: Druckänderung bis 300 kg/qcm, Empfindlichkeit des Elektrometers bis 100 Skt. für 1 Volt,  $\frac{1}{10}$  Skt. am Elektrometer sicher ablesbar.

Das Resultat steht in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der von Voigt entwickelten Theorie.

*Das Quarzparallelepiped.* Das Vorhergehende wurde bestätigt durch Untersuchung des Quarzparallelepipeds. Es hatte die Dimensionen  $20 \times 10 \times 10$  mm und war völlig unverwachsen. Die Längskante von 20 mm lief der optischen Achse parallel, die anderen Kanten fielen zusammen mit einer elektrischen Achse bez. einer Achse fehlender Piezoelektrizität. Versilberte man zwei gegenüberliegende Flächen von den Dimensionen  $20 \times 10$  mm ganz, ließ alles andere unversilbert und befestigte das Präparat in der geschilderten Art am Verschlüßstücke des Druckzyinders, so erhielt man überhaupt keine Elektrizität bei Druckänderungen, mochten die zwei benutzten Flächen senkrecht stehen zur elektrischen Achse oder mit ihnen parallel laufen. Versilberte man auf den zur elektrischen Achse senkrecht stehenden Flächen nur zwei schmale Streifen in der Mitte, dann traten bei Druckänderungen Ausschläge auf wie beim Quarzyldner. Die Bestäubung des in freier Luft sich abkühlenden Parallelepipeds zeigt den Grund. Man erhält auf jeder der betrachteten Flächen entgegengesetzt gefärbte Partien gleicher Größe. Ist die ganze Fläche versilbert, so erhält man bei Druckänderungen am Elektrometer

den Ausschlag Null als Summe entgegengesetzt gleicher Elektrizitäten. Ein solches Aufheben kann nicht mehr eintreten, wenn man nur Streifen versilbert, die beim Abkühlen in freier Luft überall gleiche Elektrizität zeigen.

*Der Turmalin.* Das untersuchte dunkelgrüne Turmalin von Brasilien war völlig wasserklar und frei von Sprüngen. Es wurden an seinen Enden senkrecht zur optischen Achse zwei ebene Flächen angeschliffen. Die Länge des Präparates war 43 mm, die Gestalt die eines ungefähr dreikantigen Prismas. Die Endflächen wurden versilbert, an die Versilberungen dünne Kupferdrähte angelötet, der Turmalin in der oben erwähnten Art durch Festklemmen in der Mitte am Verschlußstück befestigt, und die Kupferdrähte mit den durch das Verschlußstück gehenden Zuleitungen verlötet. Die Isolation des Turmalins nach dem Einsetzen in den Druckzylinder war ungefähr von derselben Größenordnung wie beim Quarz. Bei Druckänderungen zeigten sich Elektrizitäten, die beim Zusammendrücken entgegengesetzt waren denen beim Entspannen und beim Vertauschen der Turmalinpole ihr Zeichen umkehrten. Die Elektrizitäten waren dem Vorzeichen nach beim Zusammendrücken die des Erkaltens, beim Entspannen die des Erwärmens. Es wurde, wenn nichts anderes bemerkt, stets so beobachtet, daß der eine Turmalinpol geerdet war, der andere zum Elektrometer führte. Wurden beide Pole miteinander und mit dem Elektrometer verbunden, dann wurde bei Druckänderungen bis 300 kg/qcm und der bei den folgenden quantitativen Messungen benutzten Elektrometerempfindlichkeit (ca. 2 Skt. für 1 Volt) kein Ausschlag erhalten, ein Beweis für völliges Fehlen jeder Störung.

**Einfluß der durch Druckänderung hervorgerufenen  
Wärmevorgänge.**

Die durch Druckänderung hervorgerufenen Wärmevorgänge in Paraffinöl und Turmalin lassen sich im elektrischen Verhalten des letzteren verfolgen. Es wurden ca. 120 kg/qcm Druck gepumpt und dann das ganze eine Stunde lang in einer auf  $0,1^{\circ}\text{C}$ . konstant gehaltenen Temperatur stehen gelassen. Diese Zeit genügte, wie aus dem folgenden hervorgeht, um die Kompressionswärme von Öl und Turmalin abfließen zu lassen. Der Druck, der anfangs wegen der Dehnung der Röhren etwas sinkt, war dann eben-

falls völlig konstant. Nun wurde der Druck durch Öffnen des Pumpenauslaßventiles so rasch als möglich entspannt, was etwa 3 Sek. dauerte, wegen der Enge des Verbindungsrohres zwischen Pumpe und Druckzylinder und der Zähigkeit des Paraffinöls. Die von der eigentlichen Druckänderung herrührende Elektrizität wurde zur Erde abgeleitet. Hierauf wurde die Erdleitung des Elektrometers eine Minute lang aufgehoben, der in dieser Zeit entwickelte Ausschlag notiert, dann rasch geerdet, wobei der Nullpunkt kontrolliert wurde, dann der in der nächsten Minute entwickelte Ausschlag beobachtet etc. Es zeigte sich nach Ablauf der durch das Entspannen direkt entwickelten Elektrizität eine doppelte Umkehr des Elektrometerganges. War

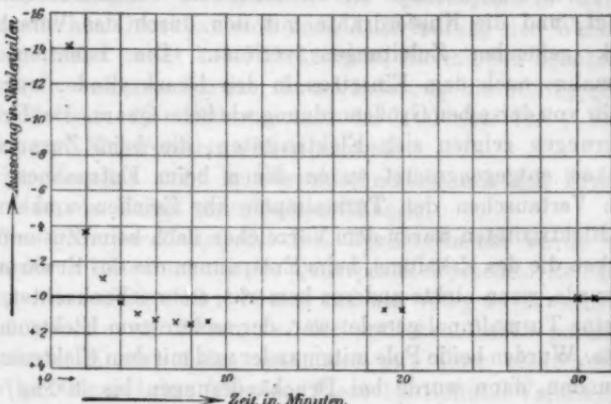


Fig. 8.

etwa der Ausschlag des Entspannens positiv, dann lieferte die nächste etwa vier Minuten dauernde Periode negative Elektrizität, die folgende von etwa 26 Minuten Dauer wieder positive. Addition der in jeder der beiden letzten Phasen erhaltenen Ausschläge, von denen also jeder der in einer Minute vom Turmalin entwickelten Elektrizitätsmenge proportional ist, zeigt, daß die Summen ungefähr einander gleich sind. Fig. 3 gibt eine graphische Darstellung des Elektrometerganges. Abszisse ist die Zeit in Minuten. Ordinate der nach Verlauf je einer Minute am Elektrometer abgelesene Ausschlag. Bei dem speziellen dargestellten Versuche war die Elektrizität des Entspannens selbst positiv, die der ersten Phase negativ, die

der zweiten positiv. Die mittlere Elektrometerempfindlichkeit bei diesem Versuche war: 12,8 Skt. für 1 Volt. Die anderen Zahlenwerte folgen unten.

Der Grund des geschilderten Elektrometerganges ist der: Beim raschen Entspannen äußert sich zunächst die durch Druckänderung bedingte Elektrizität des Turmalins, die der des Erwärmens entspricht. Nun kühlst sich beim Entspannen das Paraffinöl stärker ab als das Turmalin. Der (etwa vier Minuten dauernde) Temperaturausgleich zwischen Öl und Turmalin bedingt Abkühlen des Turmalins: Elektrizität des Erkaltens. Turmalin und Öl ist jetzt unter Umgebungstemperatur abgekühlt. Das Ganze erwärmt sich auf die Temperatur der Umgebung in etwa 26 Minuten: Elektrizität des Erwärmens. Die in den beiden letzten Phasen aufgetretenen Temperaturänderungen sind ungefähr gleich, daher die Gleichheit der dabei geförderten Elektrizitätsmengen. Die für den Ausgleich nötigen Zeiten hängen natürlich von den speziellen Dimensionen des Turmalins und Druckzylinders etc. ab.

**Quantitative Beziehungen. Die von dem Turmalin  
für 1 kg/qcm Druckänderung gelieferte Elektrizitätsmenge.**

Für die Messungen wurde das Elektrometer mit einem Präzisionsvoltmeter von Siemens & Halske und einer Batterie von zehn Akkumulatoren geeicht. Die Beziehung zwischen angelegter Spannung und dadurch bewirktem Ausschlag wurde graphisch verwertet. Die mittlere Empfindlichkeit betrug 2,04 Skt. für 1 Volt. Die geringe elastische Nachwirkung des Elektrometerblättchens wurde vernachlässigt. Die Kapazität des mit dem Turmalin in Verbindung stehenden Systems wurde durch Ladungsteilung ermittelt zwischen dem System und einem Kreisplattenkondensator. Korrekturen für Rand und Plattendicke wurden angebracht. Um die Zuleitungen zu dem Kondensator sowie den Einfluß der umgebenden Leiter in Rechnung ziehen zu können, wurden bei jeder Kapazitätsbestimmung zwei Meßreihen vorgenommen mit verschiedenen passend gewählten Abständen der Kondensatorplatten. Die Dimensionen waren:

Radius der Platten . . . . .	5,20 cm
Dicke " " . . . . .	0,17 "
Abstand " " . . . . .	0,247 bez. 0,532 "

Die Druckmessung erfolgte mit einem Manometer von Schäffer & Budenberg. Es wurde verglichen mit einem von Wagner<sup>1)</sup> mit Hilfe eines Amagatmanometers kalibrierten gleichartigen Instrumente derselben Firma. Die daraus folgenden Korrekturen wurden an den Druckablesungen angebracht. Einwirkung von elastischer Nachwirkung sowie von Temperatur auf die Manometerablesungen wurden nicht berücksigt, weil geringer als die Meßfehlergrenze der übrigen Faktoren. *Die definitiven Messungen* der entwickelten Elektrizitätsmenge wurde bei Druckentspannung ausgeführt, weil die Einrichtung der Druckpresse dafür bequemer war. Es wurde auf den gewünschten Druck komprimiert und gewartet, bis der Turmalin die Temperatur seiner Ölumgebung angenommen hatte. Zu warten, bis das Öl auch wieder Zimmertemperatur angenommen hatte, war unnötig. Der Druck wurde so rasch als möglich durch Öffnen des Auslaßventiles entspannt und der dadurch am Elektrometer erzeugte Ausschlag notiert. Zusammen mit Elektrometerempfindlichkeit und Kapazität des Systems ergibt sich daraus die geförderte Elektrizitätsmenge.

Störend kann dabei in Betracht kommen der Einfluß der besprochenen Wärmevorgänge, denn der Ausschlag setzt sich aus nachstehenden Größen zusammen:

1. aus der Elektrizität, die herrührt von der reinen Druckänderung des Turmalins;
2. aus der Elektrizität, die herrührt von der Abkühlung des Turmalins selbst bei dieser Druckänderung;
3. aus der Elektrizität, die davon herstammt, daß das Paraffinöl sich beim Entspannen stärker abkühlt als der Turmalin, und daß diese Temperaturdifferenz unter Umständen schon während des Entspannens ihren Einfluß auf den Turmalin geltend macht durch weiteres Abkühlen eventuell verbunden mit Auftreten lokaler Spannungen.

Der Einfluß von 3. läßt sich durch möglichst rasches (adiabatisches) Entspannen von 1. trennen. Bei den vorliegenden Versuchen sind die diesbezüglichen Daten:

Dauer des Entspannens von 100 kg/qcm etwa drei Sekunden.  
Dauer des Wärmeausgleichs zwischen Öl und Turmalin etwa

---

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. 15. p. 906. 1904.

vier Minuten (vgl. oben). Vergleicht man die durch diesen Wärmeausgleich entwickelte Elektrizitätsmenge mit der, die die Druckentspannung von 100 kg/qcm liefert, so ergibt sie sich zu 7,8 Proz. der letzteren. Die ausgeglichene Temperaturdifferenz zwischen Öl und Turmalin ergibt sich aus der Formel von W. Thomson zu rund  $1^{\circ}$  C.<sup>1)</sup> Dieselbe Formel zeigt, daß der Turmalin selbst bei der Entspannung sich nur um wenige hundertel Grad abkuhlt. Daraus folgt, daß der unter 2. angeführte Einfluß auf das Resultat belanglos ist.

Alles zusammengefaßt ergibt sich, daß die im folgenden gegebenen Zahlen nur eine untere Grenze für die vom Turmalin durch Druckänderung entwickelte Elektrizitätsmenge darstellen, daß man aber völlig sicher geht, wenn man den störenden Einfluß der besprochenen Wärmevorgänge auf höchstens 7 Proz. des Endresultats veranschlagt.

Nr.	Entspannt vom Druck kg/qcm auf 1 kg/qcm		Kapazität in cm (elektrost. C.G.S.)	Entwickelte Spannung (elektrost. C.G.S.)	Elektrizitätsmenge (elektrost. C.G.S.)	Elektrizitätsmenge für 1 kg/qcm Druckänderung
	Abgelesen	Korrigiert				
1	96	87,1	28,1	$-5,81 \cdot 10^{-2}$	-1,633	$1,90 \cdot 10^{-2}$
2	52	43,0		-2,98 "	-0,837	1,99 "
3	56	47,0		+3,03 "	+0,858	1,87 "
4	99	90,0	28,3	+5,78 "	+1,636	1,84 "
5	56	47,0		+8,07 "	+0,869	1,89 "
6	95	86,2		+5,51 "	+1,560	1,83 "
7	92	88,3		-5,64 "	-1,495	1,82 "
8	60	51,0	26,5	-8,48 "	-0,909	1,82 "
9	98	89,1		-6,01 "	-1,593	1,81 "
10	60	51,0		-8,48 "	-0,922	1,84 "

Die angeführte Tabelle enthält das Resultat von zehn Einzelversuchen. In der ersten Kolumne steht die laufende

1) Berechnet man aus diesen Zahlen und den Werten der für 100 kg/qcm Entspannung vom Turmalin gelieferten Elektrizitätsmenge, sowie dem Querschnitt des Turmalins das für  $1^{\circ}$  Temperaturänderung erregte Moment der Volumeneinheit im C.G.S.-System, so erhält man den Wert 0,7 in guter Übereinstimmung mit den von Riecke (Wied. Ann. 40. p. 264. 1890) und Riecke u. Voigt (Wied. Ann. 45. p. 523. 1892) gegebenen Werten.

Nummer des Versuches, in der zweiten der Druck, von dem aus auf Atmosphärendruck entspannt wurde, am Manometer abgelesen. In der dritten der Druck korrigiert in kg/qcm, in der vierten die Kapazität des mit dem Turmalin in Verbindung stehenden Systems in Zentimeter (elektrostatische C.G.S.-Einh.), die jedesmal neu bestimmt wurde, wenn zum Vertauschen der Turmalinpole Drähte umgelegt werden mußten. In der fünften die entwickelte Spannung elektrostatisch. Das Vorzeichen gibt an, ob positive oder negative Elektrizität entwickelt wurde (je nach dem mit dem Elektrometer verbundenen Turmalinpol). In der sechsten die Elektrizitätsmenge in elektrostatischen C.G.S.-Einheiten und schließlich in der siebenten die Elektrizitätsmenge für 1 kg/qcm Druckänderung.

Als Mittelwert für den untersuchten Turmalin ergibt sich:

$1,86 \cdot 10^{-2}$  elektrostatische Elektrizitätseinheiten

für 1 kg/qcm Druckänderung.

Um das erregte Moment der Volumeneinheit zu berechnen, wurde der Querschnitt des Turmalins bestimmt. Er ergab sich durch Auswägung und Längenmessung zu 0,287 qcm.

Daraus folgt: Moment der Volumeneinheit für eine Dyne Druckänderung  $8,0 \cdot 10^{-8}$  (C.G.S.). Aus den von Riecke und Voigt<sup>1)</sup> bestimmten piezoelektrischen Moduln des grünen Turmalins von Brasilien ergibt sich aus den Beziehungen, die aus der Voigtschen Theorie für hydrostatischen Druck folgen, für die hier direkt bestimmte Größe der Wert  $7,3 \cdot 10^{-8}$ . Die beiden Resultate stimmen somit befriedigend überein.

München, Physikalisches Institut der Universität.

1) E. Riecke u. W. Voigt, Wied. Ann. 45. p. 528. 1892 und Göttinger Nachr. p. 166. 1898.

(Eingegangen 24. Dezember 1905.)

hing sich soll schriftlich ausgetauscht werden, ob es möglich ist, eine zuerst  
1904 Gleichungen

**5. Über die Bewegungsgleichungen und  
die elektromagnetische Energie der Elektronen;  
von Emil Kohl.**

Die Untersuchung gewisser Elektronenbewegungen führten den Verfasser dazu, einige in zwei früheren Arbeiten<sup>1)</sup> aufstellte Formeln einer Revision zu unterziehen. Es zeigte sich, daß in der Gleichung (2) der zweitgenannten Arbeit für die Energie eines Elektrons ein Glied unterdrückt erscheint, welches von wesentlichem Einflusse auf die Untersuchung der Bewegung ist. Ferner hatte der Verfasser in beiden Arbeiten die bekannten retardierten Potentiale  $U, F, G, H$  unter der Annahme berechnet, daß gewisse Größen, deren Betrag etwa  $10^{-20}$  beträgt, gegen die Einheit vernachlässigt werden können. Eine genaue Untersuchung ergab nun das damals nicht vorherzusehende Resultat, daß diese Genauigkeitsgrenze nicht genügt, indem gerade diese außerordentlich kleinen Glieder in den Endformeln ausschlaggebend werden. Die Ergebnisse dieser Revision sollen nun in dieser Arbeit näher auseinandergesetzt werden.

**1. Zusammenstellung der benutzten Formeln.\***

Den Ausgangspunkt der Untersuchungen bilden die bekannten Lorentz-Wiechertschen Nahe- und Fernwirkungs-gleichungen

$$(1) \quad \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial P}{\partial t} + 4\pi\sigma k_{z_0} = \frac{\partial \beta}{\partial z_0} - \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} \text{ etc.,}$$

$$(2) \quad \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y_0} - \frac{\partial Q}{\partial z_0} \text{ etc.,}$$

$$(3a) \quad P = - \frac{\partial U}{\partial z_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial F}{\partial t} \text{ etc.,}$$

$$(3b) \quad P = - \frac{\partial U}{\partial z_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d F}{d t} + \left[ \frac{\partial F}{\partial z_0} k_{z_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} k_{y_0} + \frac{\partial F}{\partial x_0} k_{x_0} \right] \text{ etc.,}$$

$$(4) \quad \alpha = \frac{\partial G}{\partial z_0} - \frac{\partial H}{\partial y_0} \text{ etc.,}$$

1) E. Kohl, Ann. d. Phys. 13. p. 770—790; 15. p. 531—542. 1904.

ferner die Gleichungen für die elektromagnetische Energie und deren Änderung

$$(5) \quad E = \frac{1}{2 \cdot 4\pi} \left[ \int (P^2 + Q^2 + R^2) d\tau + \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau \right],$$

$$(6) \quad \frac{dE}{dt} = - \mathfrak{B} \int \sigma (P k_{x_0} + Q k_{y_0} + R k_{z_0}) d\tau_0.$$

Das Integral (6) erstreckt sich über alle vorhandenen elektrischen Massen mit der Dichte  $\sigma$ ;  $k$ , sind die Quotienten der Geschwindigkeiten  $c$ , durch die Lichtgeschwindigkeit  $\mathfrak{B}$ ;  $\partial \cdot / \partial t$  bedeutet die zeitliche Änderung einer Funktion, wenn sich diese auf einen ruhenden Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  des Raumes bezieht,  $d \cdot / dt$  dagegen die Änderung, wenn der betreffende Punkt der Masse selbst angehört und sich mit ihr bewegt, wobei die Gleichung

$$(7) \quad \frac{d \cdot}{dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + \mathfrak{B} \left[ \frac{\partial \cdot}{\partial x_0} k_{x_0} + \frac{\partial \cdot}{\partial y_0} k_{y_0} + \frac{\partial \cdot}{\partial z_0} k_{z_0} \right]$$

besteht; für die auftretenden partiellen Integrationen über den ganzen Raum werde ferner das Prinzip der Kontinuität der Übergänge in der Boltzmannschen Fassung<sup>1)</sup> angewendet. Da die Dichte  $\sigma$  eines Teilchens unverändert bleibt, so hat man

$$(8) \quad \frac{d\sigma}{dt} = 0;$$

aus (1) folgt weiter die Kontinuitätsgleichung

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x_0} (\sigma k_{x_0}) + \frac{\partial}{\partial y_0} (\sigma k_{y_0}) + \frac{\partial}{\partial z_0} (\sigma k_{z_0}) = - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial \sigma}{\partial t};$$

aus (8) und (9) ergibt sich unter Benutzung von (7) sofort

$$(10) \quad \frac{\partial k_{x_0}}{\partial x_0} + \frac{\partial k_{y_0}}{\partial y_0} + \frac{\partial k_{z_0}}{\partial z_0} = 0.$$

Ferner sollen die Komponenten  $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$  der auf die Raumseinheit der elektrischen Masse wirkenden Gesamtkraft die Gestalt

$$(11) \quad \Xi = \sigma (P + \beta k_{z_0} - \gamma k_{y_0}) d\tau \text{ etc.}$$

besitzen. Wie man sieht, lässt sich die Energiezunahme  $dE/dt$  statt (6) auch in der Gestalt

$$(6') \quad \frac{dE}{dt} = - \int \sigma [\Xi k_{x_0} + \mathsf{H} k_{y_0} + \mathsf{Z} k_{z_0}] d\tau_0$$

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes, II. Teil. p. 8. Leipzig 1893.

schreiben. Schließlich seien die (Ann. d. Phys. 15. p. 534 und 536. 1904) Gleichungen

$$(12) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} d\tau = 0 \text{ für das Innere, } = \pm \sigma c_N dO \text{ für die Grenzen,}$$

$$(13) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x_0} d\tau_0 = 0 \text{ etc. } \left\{ \begin{array}{l} \text{für das Innere, } = \mp \sigma dy_0 dz_0 \text{ etc. für die} \\ \text{Grenzen} \end{array} \right.$$

der Elektrons angeführt, wobei  $c_N$  die auf dem Oberflächen teilchen  $dO$  des Elektrons senkrecht stehende Komponente seiner Geschwindigkeit darstellt. Es ist bemerkenswert, daß in der Elektronentheorie vermöge (12) und (13) Oberflächen integrale in der Form von Raumintergralen auftreten.

Was die vorkommenden Ausdrücke  $U, F, G, H$  betrifft, so sind sie in ihrer allgemeinsten Form durch

$$(14) \quad U, F, G, H = \int \frac{\sigma, \sigma k_\xi \left( t - \frac{r}{\varrho} \right), \sigma k_\eta \left( t - \frac{r}{\varrho} \right), \sigma k_\zeta \left( t - \frac{r}{\varrho} \right)}{\varrho \left[ 1 - k_\sigma \left( t - \frac{r}{\varrho} \right) \cos \vartheta \right]}$$

dargestellt, wobei

$$(15) \quad r^2 = [(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2],$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_\sigma \left( t - \frac{r}{\varrho} \right) \cos \vartheta = \frac{x_0 - \xi}{\varrho} k_\xi \left( t - \frac{r}{\varrho} \right) \\ \quad + \frac{y_0 - \eta}{\varrho} k_\eta \left( t - \frac{r}{\varrho} \right) + \frac{z_0 - \zeta}{\varrho} k_\zeta \left( t - \frac{r}{\varrho} \right), \end{array} \right.$$

$$(17) \quad \xi = \int_0^t c_\xi(t) dt, \quad \eta = \int_0^t c_\eta(t) dt, \quad \zeta = \int_0^t c_\zeta(t) dt$$

gesetzt wurde (Ann. d. Phys. 11. p. 515—528. 1903); die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn ist hierbei mit  $c_\sigma$  bezeichnet.

Es sei hervorgehoben, daß die angeführten Gleichungen keineswegs die Vorstellungen der Elektronentheorie zu ihrer Ableitung bedürfen, sondern sich unmittelbar aus den Maxwell'schen Gleichungen und dem Dopplerschen Prinzipie als Gleichungen des inneren Feldes bewegter elektrischer Massen in einem ruhenden Mittel (hier des Äthers) ergeben, wie dies der Verfasser (Boltzmann-Festschrift 1904. p. 678—686) gezeigt

hat. Auch lassen sie sich den dortigen Entwickelungen zufolge durch eine einfache Transformation ohne Schwierigkeit in die Maxwellsche Form überführen. Erwähnenswert ist hierbei, daß nach dem Lorentz-Wiechertschen Systeme das Feld an jeder Stelle des Raumes durch die mit Lichtgeschwindigkeit sich fortpflanzenden Impulse dargestellt wird, welche von den als gegebenen betrachteten elektrischen Massen ausgehen, während die entsprechenden Maxwell-Stefenschen Gleichungen so gedeutet werden können, daß im ganzen unendlichen Raum gleichzeitig gewisse Vorgänge auftreten, welche sich am einfachsten als elektrische Bewegungen beschreiben lassen; diese Vorgänge rufen Kräfte hervor, welche momentan an allen Stellen des Raumes zur Wirkung gelangen, bei denen also von einer besonderen Fortpflanzungsgeschwindigkeit keine Rede mehr ist. Die Möglichkeit der identischen Transformation beider Systeme ineinander sagt dann, daß die Gesamtbewegung so vor sich geht, als würden an gewissen Stellen wahre elektrische Massen vorhanden sein, von welchen die durch die angeführten Gleichungen (1) bis (4) beschriebenen Impulse mit Lichtgeschwindigkeit ausgehen. Hierbei ist diesem Unterschiede durch die dem Lorentz-Wiechertschen Systeme eigentümliche Verwendung von retardierten Potentialen an Stelle der gewöhnlichen Rechnung getragen.

Eine bedeutende Vereinfachung erfährt die Untersuchung einer großen Gruppe von Elektronenbewegungen durch zwei Annahmen, welche sich unmittelbar aus der Tatsache ergeben, daß der Halbmesser  $a$  des als Vollkugel gedachten Elektrons jedenfalls außerordentlich klein ist. Die erste Annahme besteht darin, daß bei der überwiegenden Anzahl der Elektronenbewegungen Ausdrücke von der Form

$$\frac{\partial^n e_r}{\partial t^n} \left( \frac{a}{\mathfrak{B}} \right)^n \frac{1}{(1 - k_r)^n}$$

gegen  $e_r$ , sehr klein sind und als Glieder erster Ordnung betrachtet werden können. Die zweite Voraussetzung stützt sich auf den in der zweitgenannten Arbeit abgeleiteten Satz, daß die drehende Bewegung der Elektronen gegenüber der fortschreitenden nur dann einen nennenwerten Betrag erreichen kann, wenn die Inhomogenität des äußeren Feldes von infra-

molekularer Größenordnung ist, eine Bedingung, welche selbst bei den schnellsten Lichtschwingungen noch nicht erreicht wird. Schließt man demnach solche Bewegungen von der Betrachtung zunächst aus, so kann man die Bewegung des Elektrons mit großer Annäherung als eine rein fortschreitende betrachten und die Größen  $k$ , innerhalb jedes Elektrons als gleich annehmen, was in der Folge stets geschehen soll.

## 2. Die Änderung der elektromagnetischen Energie des Feldes.

Setzt man in (6) die Ausdrücke aus (3) ein, so erhält man

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \mathfrak{V} \int \left[ \frac{\partial U}{\partial x_0} \sigma k_{x_0} + \frac{\partial U}{\partial y_0} \sigma k_{y_0} + \frac{\partial U}{\partial z_0} \sigma k_{z_0} \right] d\tau_0 \\ \quad + \int \sigma \left[ \frac{dF}{dt} k_{x_0} + \frac{dG}{dt} k_{y_0} + \frac{dH}{dt} k_{z_0} \right] d\tau_0 \\ \quad - \mathfrak{V} \int \left[ \frac{\partial F}{\partial x_0} \sigma k_{x_0} k_{x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \sigma k_{y_0} k_{x_0} + \frac{\partial F}{\partial z_0} \sigma k_{z_0} k_{x_0} \right. \\ \quad \left. + \frac{\partial G}{\partial x_0} \sigma k_{x_0} k_{y_0} + \frac{\partial G}{\partial y_0} \sigma k_{y_0} k_{y_0} + \frac{\partial G}{\partial z_0} \sigma k_{z_0} k_{y_0} \right. \\ \quad \left. + \frac{\partial H}{\partial x_0} \sigma k_{x_0} k_{z_0} + \frac{\partial H}{\partial y_0} \sigma k_{y_0} k_{z_0} + \frac{\partial H}{\partial z_0} \sigma k_{z_0} k_{z_0} \right] d\tau_0. \end{array} \right.$$

Man integriere partiell unter Anwendung des Kontinuitätsprinzips und berücksichtige die Gleichungen (12) und (13); es folgt

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \int \sigma U c_N dO - \int \sigma \left[ F k_{x_0} + G k_{y_0} + H k_{z_0} \right] c_N dO \\ \quad + \int \sigma \left[ \frac{dF}{dt} k_{x_0} + \frac{dG}{dt} k_{y_0} + \frac{dH}{dt} k_{z_0} \right] d\tau_0 \\ \quad + \mathfrak{V} \int \sigma \left[ F \left( \frac{\partial k_{x_0}}{\partial x_0} k_{x_0} + \frac{\partial k_{x_0}}{\partial y_0} k_{y_0} + \frac{\partial k_{x_0}}{\partial z_0} k_{z_0} \right) \right. \\ \quad \left. + G \left( \frac{\partial k_{y_0}}{\partial x_0} k_{x_0} + \frac{\partial k_{y_0}}{\partial y_0} k_{y_0} + \frac{\partial k_{y_0}}{\partial z_0} k_{z_0} \right) \right. \\ \quad \left. + H \left( \frac{\partial k_{z_0}}{\partial x_0} k_{x_0} + \frac{\partial k_{z_0}}{\partial y_0} k_{y_0} + \frac{\partial k_{z_0}}{\partial z_0} k_{z_0} \right) \right] d\tau_0. \end{array} \right.$$

Die Bewegung des Elektrons wird in ihrer allgemeinsten Gestalt aus einer Fortschreitung und einer Drehung bestehen, so daß sich die jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten der Gesamtbewegung in folgender Art darstellen lassen:

$$k_{x_0} = p_{x_0} - w_Y z_0 + w_Z y_0 \text{ etc.,}$$

wobei  $\mathfrak{V} p_{x_0}$ ,  $\mathfrak{V} p_{y_0}$ ,  $\mathfrak{V} p_{z_0}$  die Komponenten der Fortschreitungs-geschwindigkeit,  $\mathfrak{V} w_X$ ,  $\mathfrak{V} w_Y$ ,  $\mathfrak{V} w_Z$  jene der Winkelgeschwindigkeit um die betreffenden Achsen bedeuten und als reine Funktionen der Zeit, nicht aber auch der Koordinaten aufzufassen sind. Hierdurch erhält man für die Klammerausdrücke des letzten Integrales die Werte

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_{x_0}}{\partial x_0} k_{x_0} + \frac{\partial k_{x_0}}{\partial y_0} k_{y_0} + \frac{\partial k_{x_0}}{\partial z_0} k_{z_0} &= w_Z p_{y_0} - w_Y p_{z_0} - x_0 w_Z^2 \\ &+ w_X [w_X x_0 + w_Y y_0 + w_Z z_0] \text{ etc.}; \\ [w_Z^2 &= (w_X^2 + w_Y^2 + w_Z^2)]. \end{aligned}$$

Durch Einführung in (19) ergibt sich schließlich, daß zu den ersten drei Gliedern das vierte Glied in der Form tritt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} \int \sigma [F(w_Z p_{y_0} - w_Y p_{z_0}) + G(w_X p_{z_0} - w_Z p_{x_0}) + H(w_Y p_{x_0} - w_X p_{y_0}) \\ - (F x_0 + G y_0 + H z_0) w_Z^3 \\ + (F w_X + G w_Y + H w_Z) (w_X x_0 + w_Y y_0 + w_Z z_0)] d\tau_0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist an Stelle des Ausdruckes (2) in der zweit-genannten Arbeit zu setzen, in welcher das Glied  $\partial h_r / \partial t$  irrtümlicherweise unterdrückt wurde.

### 3. Größenverhältnis der elektrischen Teilkräfte.

Wenn man die Ausdrücke (17) mittels der Taylorschen Reihe entwickelt, so ergibt sich

$$(20) \quad \xi = x - k_x r + \frac{1}{2} k'_x r \left( \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) - \frac{1}{3!} k''_x r \left( \frac{r}{\mathfrak{B}} \right)^2 \pm \dots \text{etc.},$$

wobei die Quotienten

$$\left( \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) < \frac{a}{\mathfrak{B}} \frac{1}{1 - k_m}$$

sind und  $c_m$  die Maximalgeschwindigkeit auf der Strecke  $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$  bedeutet. Wenn diese nicht sehr nahe der Lichtgeschwindigkeit kommt, ist  $r/\mathfrak{B}$  von der Größenordnung  $a/\mathfrak{B}$ , also etwa  $10^{-22}$ . Man kann daher in erster Annäherung die Entwicklung von  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  beim dritten Gliede abbrechen, indem man in ihr und in allen aus ihr gebildeten Ausdrücken die mit  $(r/\mathfrak{B})^n$  [ $n \geq 1$ ] multiplizierten Glieder vernachlässigt.

Dann nimmt  $U$  die einer quasistationären Bewegung entsprechende Form

$$(21) \quad U_0 = \int \frac{\sigma d\tau}{V \varrho^2 [1 - (k \sigma \sin \varphi)^2]}$$

an (Ann. d. Phys. 13. p. 774—775. 1904); hierin bedeutet  $\varrho$  die Distanz der Punkte  $(x, y, z)$  und  $(x_0, y_0, z_0)$ , während mit  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\varrho$  und der Bahngeschwindigkeit  $c_\sigma$  in  $(x_0, y_0, z_0)$  bezeichnet ist, so daß die Beziehungen gelten:

$$\varrho = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2},$$

$$k \sigma \cos \varphi = \frac{x_0 - x}{\varrho} k_{x_0} + \frac{y_0 - y}{\varrho} k_{y_0} + \frac{z_0 - z}{\varrho} k_{z_0}.$$

Setzt man eine rein fortschreitende Bewegung voraus, so geht durch Koordinatentransformation und Verlegung der Fortschreitungsrichtung in die  $z$ -Achse dieses Integral in das Potential eines gestreckten Rotationsellipsoides mit der Rotationsachse  $a$

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_0 = \frac{2 \pi \sigma a^2}{k_\sigma} \left[ \log \sqrt{\frac{1 + k_\sigma}{1 - k_\sigma}} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2 a^2 k_\sigma^2} \left( \log \sqrt{\frac{1 + k_\sigma}{1 - k_\sigma}} - \frac{k_\sigma}{1 - k_\sigma^2} \right) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{x_0^2}{a^2 k_\sigma^2} \left( \log \sqrt{\frac{1 + k_\sigma}{1 - k_\sigma}} - k_\sigma \right) \right] \end{array} \right.$$

über und die entsprechenden Werte für  $F, G, H$  ergeben sich aus ihm durch Multiplikation mit  $k_x, k_y, k_z$ . Diese Funktionen sind hierbei, wie ihre Form zeigt, von der Größenordnung  $a^4$ . Man denke sich nunmehr die elektrische Gesamtkraft entwickelt, welche auf das Elektron bei einer rein fortschreitenden Bewegung wirkt, indem man (3b) über den Raum des Elektrons integriert. Dann fallen die aus dem ersten und dritten Gliede gebildeten Integrale wegen der Symmetrieeigenschaften der Funktion  $U$  weg und es bleibt  $-(1/2)(dF/dt)$  etc. allein zurück, welches jetzt die Größenordnung  $a^4(a/2)$  besitzt. Hätte man in  $U, F, G, H$  die Entwicklung nicht beim ersten Gliede abgebrochen, so würden darin noch Glieder von der Größenordnung  $a^6(a/2)$  auftreten und die Differentialquotienten  $\partial U / \partial x_0 \dots$  etc. würden noch Glieder von der Größenordnung  $a^4(a/2)$  aufweisen, d. h. Glieder, welche dieselbe Größenordnung wie  $(1/2)(dF/dt)$  selbst besitzen und die nicht mehr aus den Oberflächenintegralen verschwinden. Daraus folgt, daß man die Funktionen  $U, F, G, H$  noch um eine nächst

höhere Größenordnung, also bis auf Glieder mit  $(a/\mathfrak{B})$  genau entwickeln muß. Führt man aber solche Zusatzglieder ein, so verschwinden auch nicht mehr die Komponenten der magnetischen Gesamtkraft, da wohl die Hauptglieder in

$$\alpha = \int \alpha d\tau_0 = \int \left( \frac{\partial G}{\partial x_0} - \frac{\partial H}{\partial y_0} \right) d\tau_0$$

wegen der Symmetrieeigenschaften der Funktionen sich heben, die Glieder der Größenordnung  $a^5(a/\mathfrak{B})$  aber Beträge gleicher Ordnung wie  $(1/\mathfrak{B})(dF/dt)$  ergeben.

#### 4. Berechnung der erweiterten Funktionen $U, F, G, H$ .

Diese Betrachtungen machen es notwendig, in (15) noch Größen von der Ordnung  $(a/\mathfrak{B})$  zu berücksichtigen.

Es ist nach (15) und (16)

$$(23) \quad \begin{cases} r^2 = \left( x_0 - x + k_x r - \frac{1}{2} k_x' r \frac{r}{\mathfrak{B}} \right)^2 \\ \quad + \left( y_0 - y + k_y r - \frac{1}{2} k_y' r \frac{r}{\mathfrak{B}} \right)^2 \\ \quad + \left( z_0 - z + k_z r - \frac{1}{2} k_z' r \frac{r}{\mathfrak{B}} \right)^2, \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} r k_o \left( t - \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \cos \vartheta = \left( x_0 - x + k_x r - \frac{1}{2} k_x' r \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \left( k_x - k_x' \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \\ \quad + \left( y_0 - y + k_y r - \frac{1}{2} k_y' r \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \left( k_y - k_y' \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \\ \quad + \left( z_0 - z + k_z r - \frac{1}{2} k_z' r \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \left( k_z - k_z' \frac{r}{\mathfrak{B}} \right), \end{cases}$$

wobei  $k_o$  wieder die Geschwindigkeit in der Bahnrichtung bedeutet und die Derivierten der Geschwindigkeit nach der Zeit  $k_{\nu}^n$  ( $n = 1, 2$ ) mit  $k_{\nu}'^n$  bezeichnet werden. Es ergeben sich also (23) und (24) bis auf Glieder von der Ordnung  $(a/\mathfrak{B})$  genau in der Form

$$(23') \quad \begin{cases} r^2 = \rho^2 + 2 \rho r k_o \cos \varphi + r^2 k_o^2 \\ \quad - \frac{r^2}{\mathfrak{B}} [(x_0 - x) k_x' + (y_0 - y) k_y' + (z_0 - z) k_z'] - \frac{r^4}{2 \mathfrak{B}} k_o'^2, \end{cases}$$

$$(24') \quad \begin{cases} r k_o \left( t - \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \cos \vartheta = \rho k_o \cos \varphi + r k_o^2 \\ \quad - \frac{r}{\mathfrak{B}} [(x_0 - x) k_x' + (y_0 - y) k_y' + (z_0 - z) k_z'] - \frac{3 r^3}{4 \mathfrak{B}} k_o'^2, \end{cases}$$

Multipliziert man (24') mit  $r$ , subtrahiert von (23') und dividiert wieder durch  $r$ , so folgt

$$(25) \quad r \left[ 1 - k_\sigma \left( t - \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \cos \vartheta \right] = \frac{\varrho^2}{r} + \varrho k_\sigma \cos \varphi + \frac{1}{4} r \frac{r}{\mathfrak{B}} k_\sigma^2.$$

Die direkte Berechnung von  $r$  aus der kubischen Gleichung (23') würde auf unübersichtliche Ausdrücke führen; da es sich aber nur um die Berücksichtigung von Größen von der Ordnung  $(a/\mathfrak{B})$  handelt, kann man

$$(26) \quad r = r_0 + |r|$$

setzen, wobei  $|r|$  von dieser noch beizubehaltenden Größenordnung und  $r_0$  jener Wert von  $r$  ist, welcher durch Vernachlässigung von Gliedern  $(r/\mathfrak{B})^n (n \geq 1)$  entsteht; dieser Wert ist aber (Ann. d. Phys. 13. p. 774. 1904)

$$(27) \quad r_0 = \varrho \frac{k_\sigma \cos \varphi + \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}}{1 - k_\sigma^2}$$

Führt man (26) in (23') ein und unterdrückt die Quadrate von  $|r|$  sowie Produkte von der Form  $(r_0/\mathfrak{B})|r|$ , so ergibt sich

$$(28) \quad \begin{cases} |r| = - \frac{r_0^2}{\mathfrak{B}} \left[ \frac{(x_0 - x) k_x' + (y_0 - y) k_y' + (z_0 - z) k_z'}{2 \varrho \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} \right. \\ \quad \left. + \frac{r_0 k_\sigma^2}{4 \varrho \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} \right] \\ = - \frac{r_0^2}{\mathfrak{B}} \left[ \frac{x_0 - x}{\varrho} k_x' + \frac{y_0 - y}{\varrho} k_y' + \frac{z_0 - z}{\varrho} k_z' \right. \\ \quad \left. + \frac{k_\sigma^2}{1 - k_\sigma^2} \frac{k_\sigma \cos \varphi + \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}}{4 \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} \right], \end{cases}$$

hieraus erhält man

$$(29) \quad \begin{aligned} & \left[ r \left[ 1 - k_\sigma \left( t - \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \cos \vartheta \right] = \frac{\varrho^2}{r_0} - \frac{\varrho^2}{r_0^2} |r| \right. \\ & \quad \left. + \varrho k_\sigma \cos \varphi + \frac{1}{4} \frac{r_0^2}{\mathfrak{B}} k_\sigma^2 \right] = \varrho \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2} \\ & \quad + \frac{1}{\mathfrak{B}} \left[ \frac{x_0 - x}{\varrho} k_x' + \frac{y_0 - y}{\varrho} k_y' + \frac{z_0 - z}{\varrho} k_z' \right. \\ & \quad \left. + \frac{\varrho r_0 k_\sigma^2}{4 \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} + \frac{r_0^2}{4} k_\sigma^2 \right]. \end{aligned}$$

Das Integral des reziproken Wertes von  $r[1 - k_\sigma(t - r/\mathfrak{B}) \cos \vartheta]$  mal  $\sigma$  ist  $U$ ; man erhält durch Division bis auf Glieder von der Ordnung  $(a/\mathfrak{B})$  genau, wenn man für  $r_0$  den Wert (27) einführt und über den Raum des Elektrons integriert:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} U = U_0 + |U| &= \int \sigma \frac{d\tau}{\mathfrak{B} \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} \\ &- \frac{1}{\mathfrak{B}} \int \sigma \left\{ \frac{\frac{x_0 - x}{\mathfrak{B}} k'_x + \frac{y_0 - y}{\mathfrak{B}} k'_y + \frac{z_0 - z}{\mathfrak{B}} k'_z}{2 \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} \right. \\ &+ \frac{k_\sigma^2}{4} \left[ \frac{k_\sigma \cos \varphi + \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}}{(1 - k_\sigma^2) \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} \right. \\ &\left. \left. + \frac{(k_\sigma \cos \varphi + \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2})^2}{(1 - k_\sigma^2)^2 [1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2]} \right] \right\} d\tau. \end{aligned} \right.$$

Hieraus kann man dann auch  $F, G, H$  berechnen, indem man berücksichtigt, daß bis auf diese Genauigkeit

$$k_z \left( t - \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) = k_x - k'_x \frac{r}{\mathfrak{B}} = k_x - \frac{r_0}{\mathfrak{B}} k'_x \text{ etc.}$$

geschrieben werden kann; es folgt dann

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} F &= \overline{U_0 k_x} + \overline{|U| k_x} - \overline{U_0 \frac{r_0}{\mathfrak{B}} k'_x}, \\ G &= \overline{U_0 k_y} + \overline{|U| k_y} - \overline{U_0 \frac{r_0}{\mathfrak{B}} k'_y}, \\ H &= \overline{U_0 k_z} + \overline{|U| k_z} - \overline{U_0 \frac{r_0}{\mathfrak{B}} k'_z}. \end{aligned} \right.$$

$|U|$  stellt hierbei das mit  $1/\mathfrak{B}$  multiplizierte Integral in Gleichung (30) dar. Die Striche über den Funktionen bedeuten, daß die Größen  $k_x, k'_x; r_0 k_x, r_0 k'_x$  als Faktoren innerhalb der betreffenden Integrale (30) zu setzen sind; so bedeutet z. B.  $\overline{U_0 (r_0/\mathfrak{B}) k_x}$  die Funktion

$$\int \sigma k_x \frac{k_\sigma \cos \varphi + \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}}{(1 - k_\sigma^2) \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau \text{ etc.}$$

##### 5. Die auf das Elektron wirkende Gesamtkraft bei einer rein fortschreitenden Bewegung desselben.

Die eben entwickelten Formeln gelten für jede allgemeine Bewegung des Elektrons. Es soll nunmehr eine rein fort-

schreitende Bewegung vorausgesetzt werden, wobei also die Geschwindigkeit und ihre Komponenten für jeden Punkt des Elektrons gleich groß, demnach nur Funktionen der Zeit, nicht aber auch der Koordinaten sind. Die so entwickelten Formeln werden später dazu benutzt werden, um die Werkenergie des Elektrons zu berechnen und sie mit jener bei einer rein drehenden Bewegung zu vergleichen, um zu prüfen, ob der Satz, daß nur bei inframolekularer Inhomogenität des äußeren Feldes die Drehung von merklichem Einfluß wird, auch bezüglich dieser richtig gestellten Formeln seine Gültigkeit beibehält.

Die Komponenten der Gesamtkraft, welche das Elektron infolge seiner Bewegung auf sich selbst ausübt, sind nach (11)

$$\mathfrak{X} = \int \sigma [P + \beta k_x - \gamma k_y] d\tau_0 \text{ etc.}, \quad (31)$$

also nach Einsetzung der Werte aus (3b) und (4)

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X} = \int \sigma \left[ -\frac{\partial U}{\partial x_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{dF}{dt} + \left( \frac{\partial F}{\partial x_0} k_x + \frac{\partial F}{\partial y_0} k_y + \frac{\partial F}{\partial z_0} k_z \right) \right. \\ \quad \left. + \left( \frac{\partial H}{\partial x_0} - \frac{\partial F}{\partial z_0} \right) k_x - \left( \frac{\partial F}{\partial y_0} - \frac{\partial G}{\partial x_0} \right) k_y \right] d\tau_0. \end{array} \right.$$

Es ist zu bemerken, daß im zweiten Gliede  $1/\mathfrak{B} dF/dt$  bloß das Hauptglied  $U_0 k_x$  berücksichtigt zu werden braucht, da dieser Ausdruck nach den im dritten Abschnitte durchgeführten Betrachtungen bereits von der Größenordnung  $(a/\mathfrak{B})a^4$  ist, die Zusatzglieder also die zu vernachlässigende Größenordnung  $(a/\mathfrak{B})^2 a^4$  enthalten. Setzt man die Werte für  $U, F, G, H$  aus (30) und (31) ein, so erhält man nach einigen einfachen Zusammenziehungen

$$(33) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X} = \int \sigma \left[ -\frac{\partial |U|}{\partial x_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{dF}{dt} + \frac{\partial |U|}{\partial x_0} k_\sigma^2 \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2\mathfrak{B}} \frac{\partial}{\partial x_0} (\overrightarrow{U_0 r_0}) k_\sigma^{2'} \right] d\tau_0 \\ = - \int \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \left[ |U|(1 - k_\sigma^2) + \frac{1}{2\mathfrak{B}} \overrightarrow{U_0 r_0} k_\sigma^{2'} \right] d\tau_0 \\ - \frac{1}{\mathfrak{B}} \int \sigma \frac{d}{dt} (U_0 k_x) d\tau_0 \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Das erste Integral werde mit  $\mathfrak{X}$  bezeichnet; es kann durch Einführung des Wertes für  $r_0$  aus (27) und unter Beachtung, daß gemäß der Annahme einer rein fortschreitenden Bewegung und der Unveränderlichkeit der Gestalt des Elektrons

$$\frac{x_0 - x}{\varrho} k_x' + \frac{y_0 - y}{\varrho} k_y' + \frac{z_0 - z}{\varrho} k_z' = \frac{d(k_\sigma \cos \varphi)}{dt}$$

ist, in der Form

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X} = \frac{1 - k_\sigma^2}{2 \mathfrak{B}} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{d(k_\sigma \cos \varphi)}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau \\ \quad + \frac{k_\sigma^{2'}}{4 \mathfrak{B}} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{k_\sigma \cos \varphi + \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau \\ \quad + \frac{k_\sigma^{2'}}{4 \mathfrak{B}} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{(k_\sigma \cos \varphi + \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2})^2}{(1 - k_\sigma^2)[1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2]} d\tau_0 d\tau \\ \quad - \frac{k_\sigma^{2'}}{2 \mathfrak{B}} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{k_\sigma \cos \varphi + \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}}{(1 - k_\sigma^2)\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau \end{array} \right.$$

geschrieben werden. Die drei letzten Integrale liefern, wenn man in ihnen den gemeinsamen Nenner

$$4(1 - k_\sigma^2)\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}$$

herstellt, die Summe

$$\frac{k_\sigma^{2'}}{4 \mathfrak{B}} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{k_\sigma \cos \varphi}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau,$$

so daß sich (34) in der einfacheren Gestalt

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X} = \frac{1 - k_\sigma^2}{2 \mathfrak{B}} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{d(k_\sigma \cos \varphi)}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau \\ \quad + \frac{k_\sigma^{2'}}{4 \mathfrak{B}} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{k_\sigma \cos \varphi}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau \end{array} \right.$$

ergibt. Um eine weitere Vereinfachung dieses Ausdruckes zu erzielen, bilde man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{k_\sigma \cos \varphi}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau &= \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \left[ \frac{\frac{d(k_\sigma \cos \varphi)}{dt}}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left( -\frac{k_\sigma^2}{2} + k_\sigma \cos \varphi \frac{d(k_\sigma \cos \varphi)}{dt} \right) k_\sigma \cos \varphi}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} \right] d\tau_0 d\tau \\ &= (1 - k_\sigma^2) \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\frac{d(k_\sigma \cos \varphi)}{dt}}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau \\ &\quad + \frac{k_\sigma^2}{2} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{k_\sigma \cos \varphi}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau. \end{aligned}$$

Es ist daher

$$(36) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{k_\sigma \cos \varphi}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau.$$

Dieses Integral lässt sich in einer für die Rechnung bequemeren Weise umformen, wenn man sich

$$\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2} = \sqrt{1 - (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + (k_\sigma \cos \varphi)^2}$$

geschrieben denkt und die Beziehungen

$$\frac{\partial (k_\sigma \cos \varphi)}{\partial x_0} = \frac{k_x}{\varphi} - \frac{x_0 - x}{\varphi} k_\sigma \cos \varphi, \quad \frac{\partial (k_\sigma \cos \varphi)}{\partial k_x} = \frac{x_0 - x}{\varphi}$$

beachtet. Es ist dann einerseits

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{k_\sigma \cos \varphi}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} &= \frac{\frac{k_x}{\varphi} - \frac{x_0 - x}{\varphi} k_\sigma \cos \varphi}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} \\ - \frac{(k_\sigma \cos \varphi)^2 \left[ \frac{k_x}{\varphi} - \frac{x_0 - x}{\varphi} k_\sigma \cos \varphi \right]}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} &= \frac{(1 - k_\sigma^2) \left( \frac{k_x}{\varphi} - \frac{x_0 - x}{\varphi} k_\sigma \cos \varphi \right)}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}}, \end{aligned}$$

andererseits

$$\frac{\partial}{\partial k_x} \frac{1}{\varphi \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} = \frac{\frac{k_x}{\varphi} - \frac{x_0 - x}{\varphi} k_\sigma \cos \varphi}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}}.$$

Bildet man das über den Raum des Elektrons erstreckte Doppelintegral, so erhält man zunächst

$$\begin{aligned} \iint \sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{k_\sigma \cos \varphi}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau \\ = (1 - k_\sigma^2) \frac{\partial}{\partial k_x} \iint \frac{\sigma}{\varphi \sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau. \end{aligned}$$

Nun läßt sich der Wert dieses jetzt erscheinenden Integrales unmittelbar aus (22) berechnen; es ist (Ann. d. Phys. 13. p. 778 bis 779. 1904; 15. p. 542. Berichtigung II. 1904)

$$(37) \quad \iint \frac{\sigma}{\sqrt{1 - (k_\sigma \sin \varphi)^2}} d\tau_0 d\tau = V(k_\sigma) = \frac{3}{5} \frac{e^3}{a} \frac{1}{k_\sigma} \log \frac{1 + k_\sigma}{1 - k_\sigma}.$$

Man bekommt also schließlich, wenn man auch in

$$\frac{1}{8} \int \sigma \frac{d}{dt} (U_0 k_\sigma)$$

diesen Wert einführt und berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial V}{\partial k_x} = \frac{\partial V}{\partial k_\sigma} \frac{k_x}{k_\sigma}$$

ist, die auf das Elektron wirkenden Komponenten der inneren Feldkraft in der Form:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{8} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{1 - k_\sigma^2}{2 k_\sigma} \frac{\partial V}{\partial k_\sigma} - V \right) k_x \right], \\ Y = \frac{1}{8} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{1 - k_\sigma^2}{2 k_\sigma} \frac{\partial V}{\partial k_\sigma} - V \right) k_y \right], \\ Z = \frac{1}{8} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{1 - k_\sigma^2}{2 k_\sigma} \frac{\partial V}{\partial k_\sigma} - V \right) k_z \right]. \end{array} \right.$$

Wie man sieht, sind sie auch in der durch Glieder von der Ordnung  $(a/8)$  erweiterten Gestalt vollständig durch die Funktion  $V$  ausdrückbar.

#### 6. Die Bewegungsgleichungen des Elektrons in einem rein elektromagnetischen Felde.

Die Felder dieser Art sind dadurch gekennzeichnet, daß sich die gesamte Feldenergie mit der Zeit nicht ändert, also  $dE/dt = 0$  zu setzen ist. Man denke sich nun die auf das

Elektron wirkende Gesamtkraft in zwei Teile zerlegt, wovon die erste ihren Ursprung in den Vorgängen außerhalb des Elektrons hat, demnach als die äußere Feldkraft zu bezeichnen ist, während die zweite die von dem Elektron bei der Bewegung auf sich selbst ausgeübte innere Feldkraft darstellt. Man hat dann bei einer rein fortschreitenden Bewegung des Elektrons

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d E}{d t} = - \left( \mathfrak{X} + \int \sigma \Xi_a d \tau_0 \right) k_x + \left( \mathfrak{Y} + \int \sigma H_a d \tau_0 \right) k_y \\ \qquad \qquad \qquad + \left( \mathfrak{Z} + \int \sigma Z_a d \tau_0 \right) k_z. \end{array} \right.$$

Die Funktionen  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  sind ihrer Form nach vollständig durch  $V$  bestimmt; den Geschwindigkeitskomponenten kann man aber noch eine Bedingung auferlegen, welche im allgemeinen die Form einer Differentialgleichung besitzen wird, jedoch mit (39) in Übereinstimmung stehen muß. Es werde nun vorausgesetzt, daß für kraftfreie Felder die Beziehung bestehe

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X} + \int \sigma \Xi_a d \tau_0 = 0, \quad \mathfrak{Y} + \int \sigma H_a d \tau_0 = 0, \\ \mathfrak{Z} + \int \sigma Z_a d \tau_0 = 0. \end{array} \right.$$

Hierdurch wird zunächst der Gleichung (39) genügt; dann ist aber diese Bedingung auch gleichbedeutend mit der Annahme, daß für die Kräfte und die durch sie hervorgerufenen Bewegungen das Prinzip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gelte, und zwar nicht nur für das System als Ganzes betrachtet, sondern vielmehr für jedes einzelne Elektron für sich. Diese so definierten Gleichungen sollen als *die Bewegungsgleichungen des Elektrons* bezeichnet werden.

Es sei hierbei darauf hingewiesen, daß die bekannte Darstellung Poincarés<sup>1)</sup> der Komponenten der Gesamtkraft in der Gestalt

$$\frac{d}{dt} \int (Q \gamma - R \beta) d \tau_0 \text{ etc.}$$

ihrem Wesen nach eigentlich eine Identität ist, welche erst dann zu einer Bestimmungsgleichung zwischen den äußeren und inneren Feldkräften, also zu einer Differentialgleichung für die Geschwindigkeitskomponenten führt, wenn über den

1) H. Poincaré, Arch. Néerl. (II) tome V, p. 252—278. 1900.  
Annalen der Physik. IV. Folge. 19.

Wert dieses Integrales eine bestimmte Aussage gemacht wird. Diese ist aber gleichbedeutend mit der Einführung eines Prinzipes über die Natur der wirkenden Kräfte, dessen Richtigkeit nur durch die Erfahrung bewiesen werden kann. Wollte man beispielsweise versuchen, diese Gleichungen durch ein Verfahren ähnlicher Art zu gewinnen, wie es in der Mechanik zur Ableitung des Wirkungsgesetzes der Kräfte aus der Form der Energiefunktion angewendet wird, so müßte man wieder ein besonderes Prinzip zugrunde legen, welches die Stelle des dort verwendeten Hamiltonschen vertreten würde. Es schien nun das nächstliegende zu sein, als Prinzip jenes der gleichen Wirkung und Gegenwirkung einzuführen und somit die Voraussetzung zu machen, daß sich die Lorentzsche Theorie in dieser Beziehung mit der Mechanik der Materie in Übereinstimmung befindet. Da jedoch hier der Massenbegriff der Mechanik als einer von der Geschwindigkeit unabhängigen Größe fehlt und zwischen der elektromagnetischen Masse der Bewegung und der elektrostatischen Masse  $e$  der Ladung unterschieden werden muß, so gilt naturgemäß auch nicht mehr das durch die zeitliche Konstanz dieses Massenbegriffes bedingte Gesetz von der Erhaltung des Schwerpunktes des Systems, wenn als dessen Komponenten im mechanischen Sinne die Ausdrücke

$$\xi = \frac{\Sigma ex}{\Sigma e}, \quad \eta = \frac{\Sigma ey}{\Sigma e}, \quad \zeta = \frac{\Sigma ez}{\Sigma e}$$

verstanden werden. Eine zeitliche Änderung dieser Größe ist also mit der Geltung des ausgesprochenen Prinzipes wohl verträglich.

Wenn man in (40) die Geschwindigkeit so klein wählt, daß ihre Quadrate gegen die Einheit verschwinden, und bezüglich der äußeren Kräfte mit Rücksicht auf die Kleinheit des Elektrons die Annahme macht, daß sie innerhalb desselben als konstant betrachtet werden dürfen, erhält man die bekannten Bewegungsgleichungen für die gewöhnlichen Kathodenstrahlen:

$$(41) \quad \frac{4}{5} \frac{e^3}{a} \frac{dk_x}{dt} = e(P_s + \beta_a k_s - \gamma_a k_y) \text{ etc.}$$

Die elektromagnetische Masse ist jetzt  $\frac{4}{5}e^3/a$  statt des in der ersterwähnten Arbeit berechneten Wertes  $\frac{4}{5}e^3/a$ , ebenso besitzt  $x$  den Wert  $\frac{4}{5}a/e$  statt  $\frac{4}{5}a/e$  und steht nunmehr in

Übereinstimmung mit dem von Abraham berechneten Werte.<sup>1)</sup> Der Einfluß, welchen die Glieder von der Ordnung ( $a/\mathfrak{B}$ ) in der Potentialfunktion  $U$  auf die Größe der inneren Gesamtkraft ausüben, besteht also darin, daß diese um ein Drittel desjenigen Betrages kleiner wird, welcher sich bei Auslassung dieser Glieder ergeben würde.

#### 7. Die erweiterten Bewegungsgleichungen des Elektrons.

Für die in der Natur auftretenden Vorgänge genügen jedoch die im vorigen Abschnitte entwickelten Gleichungen nicht, da erfahrungsgemäß auf das Elektron auch Kräfte wirken, welche nicht mehr elektromagnetischer Art sind oder deren elektromagnetische Natur wenigstens bisher noch nicht strenge nachgewiesen erscheint. Diese Kräfte finden ihr Vorbild in jenen des galvanischen Stromes, da dieser nach den Anschauungen der Elektronentheorie nur eine besondere Art der allgemeinen Elektronenbewegung darstellt. Zunächst zeigt sich, daß die Materie Kräfte auf das Elektron ausübt, welche dessen Bewegung unter gleichzeitiger Wärmeentwicklung (oder eines äquivalenten Energiebetrages) zum Stillstande bringen, und diese Kräfte finden in Analogon im Leitungswiderstande des Stromkreises, der einen speziellen Fall solcher Gegenkräfte bildet. Dann führt die Auffassung des elektrischen Stromes als Elektronenbewegung darauf, noch das Vorhandensein von Kräften anzunehmen, welche eine Bewegung des Elektrons bewirken können, ohne erkennbar elektromagnetischer Natur zu sein; ein Beispiel hierfür wäre etwa die Bewegung eines Elektrons, welches an einen materiellen Träger gebunden ist, wenn auf die Masse des letzteren äußere Kräfte wirken. Das kennzeichnende Merkmal solcher Kräfte besteht darin, daß durch sie eine Umsetzung von mechanischer, chemischer oder thermischer Energie in elektromagnetische bewirkt wird; sie sollen als elektromotorische Kräfte bezeichnet werden. Es mögen die Komponenten der von der Materie auf das ganze Elektron wirkenden Widerstandskraft mit  $W_x, W_y, W_z$ , jene der elektromotorischen Kraft mit  $X, Y, Z$  bezeichnet werden; ferner werde der elektro-

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. 10. p. 151. 1903.

magnetische Teil der gesamten Energie mit  $E$ , der nicht elektromagnetische mit  $L$  bezeichnet; dann hat man zunächst

$$(42) \quad \frac{dE}{dt} + \frac{dL}{dt} = 0,$$

ferner, wenn man die allgemeine Geltung des Prinzips der gleichen Wirkung und Gegenwirkung voraussetzt,

$$(43) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} + \int \sigma \Xi_a d\tau_0 - W_x + X = 0, \\ \mathfrak{Y} + \int \sigma H_a d\tau_0 - W_y + Y = 0, \\ \mathfrak{Z} + \int \sigma Z_a d\tau_0 - W_z + Z = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sollen als *die allgemeinen Bewegungsgleichungen des Elektrons* definiert werden. Gemäß (42) hat man jetzt zu setzen:

$$(44a) \quad \begin{cases} \frac{dE}{dt} = - \sum_{i=1}^p \left[ \mathfrak{X}^{(i)} + \int \sigma \Xi_a^{(i)} d\tau_0 \right] k_x^{(i)} \\ \quad + \left[ \mathfrak{Y}^{(i)} + \int \sigma H_a^{(i)} d\tau_0 \right] k_y^{(i)} + \left[ \mathfrak{Z}^{(i)} + \int \sigma Z_a^{(i)} d\tau_0 \right] k_z^{(i)}, \end{cases}$$

$$(44b) \quad \begin{cases} \frac{dL}{dt} = - \sum_{i=1}^p \left[ -W_x^{(i)} + X^{(i)} \right] k_x^{(i)} + \left[ -W_y^{(i)} + Y^{(i)} \right] k_y^{(i)} \\ \quad + \left[ -W_z^{(i)} + Z^{(i)} \right] k_z^{(i)}, \end{cases}$$

wobei sich das Summenzeichen auf alle vorhandenen  $p$  Elektronen erstreckt. Statt der Kräfte  $\Xi_a$ ,  $H_a$ ,  $Z_a$  können (44a) gemäß (6') auch die Kräfte  $P_a$ ,  $Q_a$ ,  $R_a$  eingesetzt werden.

### 8. Die freie Bewegungsenergie des Elektrons.

Die Gleichung (42) liefert nach Einsetzung der Werte aus (44) zunächst

$$(45) \quad \begin{cases} \frac{dE}{dt} + \sum_{i=1}^p (W_x^{(i)} k_x^{(i)} + W_y^{(i)} k_y^{(i)} + W_z^{(i)} k_z^{(i)}) \\ \quad = \sum_{i=1}^p (X^{(i)} k_x^{(i)} + Y^{(i)} k_y^{(i)} + Z^{(i)} k_z^{(i)}). \end{cases}$$

Sie spricht den Satz aus, daß die Änderung der elektromagnetischen Energie des Systems vermehrt um die ganze entwickelte Wärme (bez. die ihr äquivalente Energie) durch die Arbeit der elektromotorischen Kräfte geleistet wird, und bildet somit die Grundlage des Induktionsgesetzes für die in der ruhenden Materie oder im Äther verlaufende Elektronenbewegung.

Die elektromagnetische Energie  $E$  zur Zeit  $t$  des aus den  $p$  Elektronen bestehenden Elektronenschwarmes ist im allgemeinen Falle nach (44 a) durch den Ausdruck

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = - \sum_{i=1}^p \int_0^t (\mathfrak{E}^{(i)} k_x^{(i)} + \mathfrak{D}^{(i)} k_y^{(i)} + \mathfrak{Z}^{(i)} k_z^{(i)}) dt \\ \quad + \int_0^t \int \sigma [\Xi_a^{(i)} k_x^{(i)} + \mathbb{H}_a^{(i)} k_y^{(i)} + Z_a^{(i)} k_z^{(i)}] d\tau_0 dt \end{array} \right.$$

bestimmt und besteht demnach aus zwei gesonderten Teilen, wovon der erste durch die inneren, der zweite durch die äußeren Feldkräfte gebildet wird. Das erste Integral, welches mit  $E_i$  bezeichnet werden soll, ergibt zunächst gemäß (38)

$$\begin{aligned} E_i &= - \sum_{i=1}^p \int_0^{k_\sigma^{(i)}} \frac{d}{dk_\sigma} \left( \frac{1-k_\sigma^2}{2k_\sigma} \frac{\partial V}{\partial k_\sigma} - V \right) k_\sigma^2 dk_\sigma \quad (38) \\ &\quad + \int_0^{k_\sigma^{(i)}} \left( \frac{1-k_\sigma^2}{2k_\sigma} \frac{\partial V}{\partial k_\sigma} - V \right) k_\sigma dk_\sigma \\ &= - \sum_{i=1}^p \left[ \left( \frac{1-k_\sigma^2}{2k_\sigma} \frac{\partial V}{\partial k_\sigma} - V \right) k_\sigma^2 \Big|_0^{k_\sigma^{(i)}} - \int_0^{k_\sigma^{(i)}} \left( \frac{1-k_\sigma^2}{2k_\sigma} \frac{\partial V}{\partial k_\sigma} - V \right) k_\sigma dk_\sigma \right] \\ &= - \sum_{i=1}^p \left[ \left( \frac{1-k_\sigma^2}{2k_\sigma} \frac{\partial V}{\partial k_\sigma} - V \right) k_\sigma^2 - \frac{1-k_\sigma^2}{2} V \Big|_0^{k_\sigma^{(i)}} \right]; \end{aligned}$$

durch Einsetzung von  $V$  aus (37) erhält man dafür

$$(47) \quad E_i = \frac{3e^2}{5a} \sum_{i=1}^p \left( \frac{1}{k_\sigma^{(i)}} \log \frac{1+k_\sigma^{(i)}}{1-k_\sigma^{(i)}} - 2 \right).$$

Dieses Integral ist bloß von der Geschwindigkeit und der Anzahl der Elektronen des Schwarmes, nicht aber von dessen Gestalt abhängig. Das zweite Integral  $E_a$  liefert die Arbeit der äußeren Feldkräfte. Wenn diese bloß von den vorhandenen Elektronen herrühren und deren gegenseitige Beeinflussung darstellen, so ist dieses Integral wesentlich von der Form und der Dichte des Elektronenschwarmes abhängig, wenn man darunter die in der Raumeinheit vorhandene Elektronenzahl versteht. Ist die Dichte des Schwarmes sehr groß, so überwiegt das zweite Integral gegen das erste; ist hingegen die Dichte sehr klein und der gegenseitige Abstand der Elektronen groß gegen deren Halbmesser, so besitzt das erste Integral den ausschlaggebenden Wert und das zweite kann gegen dieses vernachlässigt werden. Man erkennt hieraus sofort, daß solche Elektronenschärme weder aufeinander noch auf ihre Teile eine ponderomotorische Wirkung ausüben, da ihre elektromagnetische Energie von ihrer Form ganz unabhängig ist.

Setzt man einen Elektronenschwarm von dieser Eigenschaft voraus, wie er in den Kathodenstrahlen verwirklicht zu sein scheint, so erhält man aus (45) die Beziehung

$$(48) \quad E_e \Big|_{k_\sigma}^{k_0} = - \sum_{i=1}^p \int_t^t (W_x^{(i)} k_x^{(i)} + W_y^{(i)} k_y^{(i)} + W_z^{(i)} k_z^{(i)}) dt.$$

Wenn angenommen wird, daß die Bewegung durch die Widerstands Kräfte gänzlich zum Stillstande kommt, so stellt wegen der Gleichung (48) die Größe

$$(49) \quad E_i = \frac{8}{5} \frac{e^2}{a} \left[ \frac{1}{k_\sigma} \log \frac{1+k_\sigma}{1-k_\sigma} - 2 \right]$$

jene Energiemenge dar, welche jedes einzelne Elektron bei Vernichtung seiner Bewegung in Form von Wärme (oder eines äquivalenten Energiebetrages) abzugeben vermag; sie soll als *freie Bewegungsenergie des Elektrons* bezeichnet werden. Diese Definition gilt übrigens, wie aus den allgemeinen Gleichungen ohne weiteres ersichtlich ist, ganz allgemein; immer ist die Größe (49) jener elektromagnetische Energiebetrag, welcher bei der Vernichtung der Geschwindigkeit des Elektrons in andere Energieform überzugehen vermag.

Die Bewegungs- und Energievorgänge spielen sich also beim Elektron im allgemeinen in folgender Art ab: Das Elektron erhält unter dem Einflusse äußerer Kräfte eine gewisse Geschwindigkeit  $c_o$ ; wenn in dieser Phase keine Widerstandskräfte vorhanden sind, so erlangt das Elektron eine freie Bewegungsenergie, welche nach (43) gleich der Arbeit der äußeren Kräfte ist und beim Einsetzen von Widerstandskräften gänzlich in nicht elektromagnetische Energie umgewandelt wird. Wenn hierbei auch keine elektromotorischen Kräfte wirken, so besteht der Vorgang darin, daß während der ersten Phase diese Bewegungsenergie dem äußeren Felde entnommen und während der zweiten Phase, wenn die Widerstandskräfte ins Spiel treten, in nichtelektromagnetische Energie übergeführt wird.

Die freie Bewegungsenergie steht in einfacher Beziehung zu der von Abraham<sup>1)</sup> mit  $W$  bezeichneten Gesamtenergie des Elektrons. Die Größe  $W$  besteht nämlich aus der freien Bewegungsenergie des Elektrons, vermehrt um die elektrostatische Energie  $(3/5)(e^2/a)$  im Zustande der Ruhe; hiervon ist der erste Teil nach dem Gesagten in andere Energieformen überführbar, während der zweite eine durch die Existenz des Elektrons bedingte und nicht weiter verwandelbare Energie elektrischer Art darstellt. Es folgt daraus

$$W = E_i + \frac{3}{5} \frac{e^2}{a} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{a} \left[ \frac{1}{k_o} \log \frac{1+k_o}{1-k_o} - 1 \right]$$

ein Wert, welcher mit dem von Abraham entwickelten nunmehr vollkommen übereinstimmt.

Wenn das Elektron von einem auf dem elektrostatischen Potentiale  $H$  stehenden Körper abgeschleudert wird, so kann man die freie Energie sofort aus der Feldenergie berechnen; eine Vergleichung führt dann bei kleineren Geschwindigkeiten auf die bekannte Beziehung

$$c_o = \sqrt{2kH} \quad (\text{Ann. d. Phys. 13. p. 786--790}).$$

Ebenso bleiben die dort (p. 782—785) angestellten Betrachtungen bezüglich eines eventuellen materiellen Trägers des Elektrons auch für die richtig gestellten Werte von  $U, F, G, H$  gültig.

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. 10. p. 147 Gleichung (15 b).

9. Vergleichung der Energie bei rein forschreitender und bei rein drehender Bewegung des Elektrons.

Die Formeln (18) und (38) gestatten, wenigstens dem Größenverhältnisse nach die durch ein äußeres Feld erzeugte Geschwindigkeit der forschreitenden und drehenden Bewegung auch für den richtiggestellten Fall zu bestimmen.

Zunächst möge auf die Entwickelungen von Schwarzschild<sup>1)</sup> verwiesen werden, wonach es bei einer allgemeinen Elektronenbewegung im kraftfreien Felde zwei ausgezeichnete Fälle einer stationär bleibenden Bewegung gibt, wenn nämlich die Drehungsebene die Fortschreitungsrichtung in sich enthält oder auf dieser senkrecht steht; diese Fälle sollen als die beiden Hauptfälle bezeichnet werden. Ferner kann man, da es sich bloß um einen schätzungsweisen Überblick über die beiden Energieanteile handelt, zunächst den einfachen Fall zugrunde legen, daß vierte und höhere Potenzen der Geschwindigkeit zu vernachlässigen sind. Man erhält so für die Energie in den beiden Hauptfällen eine Gleichung von der Form

$$(50) \quad E = M k_w^2 + N k_p^2,$$

worin  $k_w$  die Winkelgeschwindigkeit,  $k_p$  die forschreitende Geschwindigkeit des Elektronenmittelpunktes bedeutet. Die Koeffizienten  $M$  und  $N$  werden dann als die Hauptglieder der Reihenentwickelung für  $E$  nach  $k_w$  und  $k_p$  eine Schätzung des Größenverhältnisses der beiden Energieanteile gestatten.

Es möge nun eine äußere Kraft von der Form

$$(51) \quad Z_a = A + B y$$

vorausgesetzt werden, wobei  $B$  das Maß der Inhomogenität des äußeren Feldes (Ann. d. Phys. 15. p. 588. 1904) ist und ebenso wie  $A$  zunächst als eine Konstante betrachtet werden soll. Man kann dann die Bewegungsgleichungen einfach so aufschreiben, daß die Zunahme der Drehungsenergie gleich der Arbeit des Drehungsmomentes, jene der forschreitenden Energie gleich der Arbeit der im Elektronenmittelpunkte angreifenden Resultierenden der äußeren Feldkraft ist. Die Gleichung für die Zunahme der Drehungsenergie ergibt sich aber gemäß (19), da

1) K. Schwarzschild, Gött. Nachr. p. 245—278. 1908.

jetzt die mit dem Faktor  $c_N d O$  behafteten Oberflächenglieder, soweit sie die Winkelgeschwindigkeit enthalten, wegen der Orthogonalität von Drehungsrichtung und Elektronenhalbmesser und das vierte Glied wegen der Symmetrieeigenschaften der auftretenden Funktionen wegfallen, in der Gestalt

$$(52) \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \iint \sigma^2 \frac{x_0 x + y_0 y}{\varrho} k_w^2 d\tau_0 d\tau = \iint \sigma B y^2 k_w d\tau = \frac{\epsilon a^2}{5} B k_w,$$

wobei als Drehungsebene die  $X Y$ -Ebene angenommen wurde. Die Energiezunahme der fortschreitenden Bewegung wird nach (49)

$$(53) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{2}{5} \frac{\epsilon^2}{a} k_p^2 \right) = \epsilon A k_p.$$

Der Verfasser muß hierzu bemerken, daß die vereinfachte Gleichung (52) nur unter der Annahme gilt, daß statt der retardierten Potentiale die gewöhnlichen gesetzt werden können, nicht aber auch im allgemeinen Falle, da wegen der irrtümlicherweise vorgenommenen Unterdrückung der Glieder  $\partial k_z / \partial t$ ,  $\partial k_y / \partial t$ ,  $\partial k_x / \partial t$  in der Gleichung (2) (Ann. d. Phys. 15. p. 588. 1904) auch die dortige Gleichung (4) mit diesem Fehler behaftet ist.

Man hat nun zunächst

$$\iint \frac{x_0 x}{\varrho} d\tau_0 d\tau = \iint \frac{y_0 y}{\varrho} d\tau_0 d\tau = \iint \frac{z_0 z}{\varrho} d\tau_0 d\tau;$$

$$\iint \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{\varrho} d\tau_0 d\tau = \iint \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\varrho} d\tau_0 d\tau;$$

$$\iint \sigma^2 \frac{x_0 x + y_0 y + z_0 z}{\varrho} d\tau_0 d\tau = \frac{2}{3} \iint \sigma^2 \frac{x_0 x + y_0 y + z_0 z}{\varrho} d\tau_0 d\tau.$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint \sigma^2 \frac{x_0 x + y_0 y + z_0 z}{\varrho} d\tau_0 d\tau &= \iint \sigma^2 \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{\varrho} d\tau_0 d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint \sigma^2 \varrho d\tau_0 d\tau; \end{aligned}$$

für das erste Integral auf der rechten Seite erhält man

$$\begin{aligned} \iint \sigma^2 \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{\varrho} d\tau_0 d\tau \\ = \int_0^\infty \sigma^2 \left( 2\pi a^2 - \frac{2\pi}{\varrho} u^2 \right) 4\pi u^4 du = \frac{24}{85} \epsilon^2 a; \end{aligned}$$

das zweite Integral liefert

$$\begin{aligned}
 & \iint \sigma^3 \varrho d\tau_0 d\tau \\
 &= \int_0^a 4\pi \sigma^3 u^3 du \iint_0^\pi 2\pi v^2 \sin \varphi \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi} dv d\varphi \\
 &= \int_0^a 4\pi \sigma^3 u^3 du \iint_0^\pi \frac{\pi}{3u} d\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi} \\
 &= \frac{4\pi^2 \sigma^3}{3} \int_0^a u du \left\{ \int_0^u v [(u+v)^3 - (u-v)^3] dv \right. \\
 &\quad \left. + \int_u^a [(v+u)^3 - (v-u)^3] dv \right\} \\
 &= \frac{18}{85} \sigma^3 a.
 \end{aligned}$$

Es ist also

$$\int \sigma^3 \frac{x_0 x + y_0 y}{\varrho} d\tau_0 d\tau = \frac{2}{7} e^3 a k_w^2 = \frac{2}{7} \frac{e^3}{a} k_r^2,$$

wenn man statt  $k_w$  die Geschwindigkeit  $k_r$  des Elektronenäquators einsetzt. Hieraus ergibt sich

$$(52') \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{2}{7} \frac{e^3}{a} k_r^2 \right) = \frac{e}{5} B a k_r, \quad \text{oder} \quad \frac{2}{7} \frac{e^3}{a} k_r = \frac{e}{5} B a t,$$

$$(53') \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{2}{5} \frac{e^3}{a} k_p^2 \right) = e A k_p, \quad \text{oder} \quad \frac{4}{5} \frac{e^3}{a} k_p = e A t.$$

Das Verhältnis  $k_r/k_p$  der während der gleichen Wirkungsdauer  $t$  erlangten Geschwindigkeiten wird also

$$(54) \quad \frac{k_r}{k_p} = \frac{14}{25} \frac{B a}{A}.$$

Wenn demnach die Inhomogenität des Feldes etwa von der molekularen Dimension  $10^{-8}$ , also  $B \cdot 10^{-8} = A$  und somit  $B/A = 10^8$  ist, das heißt, wenn sich die äußere Kraft im Abstande des Halbmessers einer Molekel um ihren eigenen Betrag ändert, so ergibt sich hieraus  $k_r/k_p = \frac{14}{25} 10^8 a$ , es ist daher noch immer die Geschwindigkeit eines Punktes des Elektronenäquators sehr klein gegen jene seines Mittelpunktes.

Die entwickelten Gleichungen gelten zunächst in aller Strenge nur unter den in den Voraussetzungen enthaltenen drei Einschränkungen, daß nämlich erstens die vierten und höheren Potenzen der Geschwindigkeit bereits vernachlässigt werden können, daß zweitens eine Bewegung vom Typus der beiden Hauptfälle vorliegt und daß drittens die Größen  $A$  und  $B$  konstant sind. Die wichtigste Einschränkung ist ohne Zweifel die erste; denn wenn die Geschwindigkeiten der Lichtgeschwindigkeit nahe kommen, läßt sich nicht mehr ohne strengeren Beweis behaupten, daß die Größen  $M$  und  $N$  die Hauptglieder der Reihenentwicklung für die Energiefunktion bilden, wiewohl es die Möglichkeit einer solchen Reihenentwicklung als höchstwahrscheinlich hinstellt, daß der Quotient  $M/N$  dem Größenverhältnisse nach mit den entsprechenden Quotienten aus den Koeffizienten der folgenden Potenzen der Geschwindigkeiten übereinstimmt, daher die obigen Betrachtungen gültig bleiben. Dagegen werden bei kleineren Geschwindigkeiten die Betrachtungen auch für den Fall einer allgemeinen Bewegung gültig bleiben, da  $M$  und  $N$  dann immer noch die Hauptglieder der Entwicklung bilden. Anders verhält es sich mit der dritten Beschränkung, daß  $A$  und  $B$  als Konstante angenommen wurden. Wie man leicht überblickt, werden die Entwickelungen dem Größenverhältnisse nach allerdings auch dann gelten, wenn  $A$  und  $B$  gleichartige Funktionen der Zeit sind, das heißt, wenn beide nichtperiodische oder beide periodische Funktionen sind. Sie gelten jedoch nicht mehr ohne spezielle Untersuchung, wenn  $A$  eine periodische und  $B$  eine nicht-periodische Funktion ist, oder wenn  $B$  eine Periode von außerordentlich großer Dauer gegenüber jener von  $A$  besitzt. Dann kann das Drehungsmoment trotz seiner Kleinheit wegen der langen Dauer seiner Wirkung schließlich eine Drehung erzeugen, welche gegenüber der durch die periodische Funktion  $A$  hervorgerufenen fortschreitenden Bewegung einen beträchtlichen Wert besitzt.

Das Ergebnis dieser Betrachtungen lautet somit, daß die Drehung des Elektrons gegenüber seiner fortschreitenden Bewegung vernachlässigt werden kann, solange das Feld nicht von inframolekularer Inhomogenität ist, oder die eben besprochene Eigenschaft besitzt. Bei gewöhnlichen Kraftfeldern

(einschließlich jener bei Lichtschwingungen) beschreiben also die unter der Annahme einer rein fortschreitenden Bewegung abgeleiteten Gleichungen die Bewegung des Elektrons, da die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung von überwiegender Größe ist. Wo jedoch Fehler molekularer Natur ins Spiel treten, läßt sich das Fehlen einer beträchtlichen Drehungsbewegung nicht mehr im voraus behaupten. Wie man sieht, behält also in dieser Hinsicht der in der zweitbezogenen Arbeit als Hauptresultat entwickelte Satz auch bei der richtig gestellten Größe  $U$  seine Geltung.

Wien, im Dezember 1905.

(Eingegangen 2. Januar 1906.)

**6. Zur Theorie der relativen Bewegung  
und des Foucaultschen Pendelversuches;  
von Ludwig Tesar.**

§ 1. Hr. A. Denizot sucht eine neue Herleitung des Gesetzes über die Drehung der Schwingungsebene beim Foucaultschen Pendel durch die Diskussion des Ausdrückes von der kinetischen Energie der relativen Bewegung zu gewinnen.<sup>1)</sup> Der Kern seiner Darlegungen ist neu und einfach. Nur schade, daß er ebenso fehlerhaft wie einfach ist. Zur Bekräftigung dieser vielleicht überraschend herb erscheinenden Beurteilung will ich noch vor der eingehenden Detailbehandlung zwei der schwerwiegendsten Trugschlüsse herausheben: Erstens glaubt Hr. Denizot beweisen zu können, daß in aller Strenge das sogenannte Sinusgesetz gilt, jenes Gesetz, nach welchem die Winkelgeschwindigkeit der sich gegen die Erde drehenden Schwingungsebene gleich ist dem Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit der Erde und dem Sinus der geographischen Breite des Beobachtungsortes. Nun lehrt aber eine Diskussion der gewiß einwandfreien Poisson'schen Gleichungen des schwingenden Systems, daß dem nicht so sein kann. Auf diesen Umstand weist unter anderen O. Röthig in einer auch von Hrn. Denizot zitierten Arbeit „Über den Foucaultschen Pendelversuch — Eine historisch-didaktische Studie“<sup>2)</sup> hin. Zweitens gelangt man in Verfolgung der von Hrn. Denizot gegebenen Ideen zu ganz unhaltbaren Konsequenzen. Wenn Hr. Denizot aus der Gleichung<sup>3)</sup>

$$d(\sum \frac{1}{2} m c^2 - \frac{1}{2} J \omega^2) = \sum \{(X + X_0) dx + (Y + Y_0) dy + (Z + Z_0) dz\}$$

deduziert, „daß die Drehung des Körpers um die instantane Achse von irgendwelchen äußeren Kräften überhaupt ganz un-

1) A. Denizot, Ann. d. Phys. 18. p. 299. 1905.

2) O. Röthig, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Histor.-literar. Abteilg. 24. p. 153. 1879.

3) A. Denizot, l. c. p. 315.

abhängig ist<sup>1)</sup>, so wird dieser Schluß durch die einfache Tatsache des Mißlingens des Foucaultschen Versuches infolge unvollkommener Aufhängevorrichtung, Wärmeströmungen<sup>2)</sup> etc. widerlegt. Sämtliche hierbei als störend auftretende Kräfte sind aber als „äußere Kräfte“ aufzufassen.

Es scheint mir klar, daß aus der Arbeit der Kräfte in bezug auf das bewegliche System, ihrer Abhängigkeit von den (relativen) Koordinaten, sowie der Winkelgeschwindigkeit dieses Achsensystems um die augenblickliche Achse nicht auf die Gestalt der von einem Punkte, nämlich dem Angriffspunkte der Kräfte beschriebenen Bahn bezüglich eines festen Bezugssystems geschlossen werden könne. Hier liegt eine Verwechslung der Begriffe der relativen und absoluten Bewegung vor. Hr. Denizot macht einen Zirkelschluß, indem er durch die Erfahrung gegebene Tatsachen zur Ableitung ihrer selbst benutzt.

§ 2. Ich werde vorerst die Bewegung eines Punktes untersuchen, der sich unter der Wirkung beliebiger Kräfte auf einer glatten Kurve bewegt, welche gezwungen ist, sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $n$  um eine feste Achse zu drehen.<sup>3)</sup> Diese feste Achse wählen wir als die  $z$ -Achse. Die Achsen  $Ox$  und  $Oy$  denken wir uns in starrer Verbindung mit der Kurve. Sie drehen sich demnach mit der Winkelgeschwindigkeit  $n$  um die  $z$ -Achse. Ihre positiven Hälften seien so gewählt, daß der Sinn der positiven Drehung, die bekanntlich die positive  $x$ -Achse auf dem kürzesten Wege mit der positiven  $y$ -Achse zur Deckung bringt, mit dem Uhrzeigersinn übereinstimmt (französisches Koordinatensystem). Die wahren Geschwindigkeitkomponenten  $u, v, w$  des Punktes nach den Achsen  $Ox, Oy, Oz$  sind

$$(1) \quad \begin{cases} u = \frac{dx}{dt} - y n, \\ v = \frac{dy}{dt} + x n, \\ w = \frac{dz}{dt}. \end{cases}$$

1) A. Denizot, l. c. p. 316. § 23.

2) L. Weinhold, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 17. p 198. 1904; U. Behn, Physik. Zeitschr. 6. p. 744. 1905.

3) Man vgl. E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper 1. p. 194. 1898.

Man hat hierbei zu bedenken, daß der Punkt  $O$  festliegt. Analog sind die wahren Beschleunigungskomponenten nach den drei Achsen

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} - vn = \frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - n^2x, \\ \frac{dv}{dt} + un = \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} - n^2y, \\ \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

Es sind dies nichts anderes als die Slesserschen Gleichungen, ausgewertet für den in Rede stehenden Fall.<sup>1)</sup>

Nun seien  $X, Y, Z$  die Komponenten der beschleunigenden Kräfte (äußere Kräfte und etwaige Reaktionen) längs der Achsenrichtungen. Dies führt zu den Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = X + n^2x + 2n\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = Y + n^2y - 2n\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \end{cases}$$

### § 3. Aus den Gleichungen (3) folgt

$$\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz = X dx + Y dy + Z dz + n^2(x dx + y dy).$$

Setzen wir

$$(4) \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

so liefert die Integration der vorstehenden Gleichung

$$(5) \quad \frac{v^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} = \int (X dx + Y dy + Z dz) + \frac{n^2(r^2 - r_0^2)}{2}.$$

Hierin bedeutet  $v$  die ganze Relativgeschwindigkeit des sich bewegenden Punktes. Eine Verwechslung mit der früher gegebenen Bedeutung für diesen Buchstaben ist ausgeschlossen.  $r_0$  und  $v_0$  sind die einem Anfangszustande zukommenden Werte der Geschwindigkeit und des Radiusvektors. Das Integral ist über die durchlaufene Strecke zu nehmen.

In der Gleichung (5) ist der Einfluß der Kräfte

$$2n\frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad -2n\frac{dx}{dt}.$$

1) G. M. Slesser, Cambridge Quarterly Journal 2. 1858.

verschwunden. Es ist das selbstredend, wenn man bedenkt, daß ihre Resultierende senkrecht zu der von dem Punkte relativ gegen das bewegliche Achsensystem beschriebenen Kurve zu liegen kommt. Diese Resultierende leistet darob bei der Verschiebung keine Arbeit.

Gleichung (5) ist die eingangs zitierte Gleichung von Hrn. Denizot in integrierter Form, wenn man die Betrachtung auf einen Punkt der Masse 1 beschränkt. Für einen starren Körper ändert sich natürlich *im Wesen* der Darlegung gar nichts. [Statt  $r^2$  tritt das augenblickliche Trägheitsmoment  $J$  des Körpers — bei der Masse 1 — bezüglich der Rotationsachse auf. Das augenblickliche Trägheitsellipsoid<sup>1)</sup> wird zu einer Strecke, die durch den Ursprung  $O$  halbiert wird.]

Was aber darf uns veranlassen, aus Gleichung (5) zu schließen, daß sich eine durch den Massenpunkt und die Achse gehende Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $-n$  gegen das relative Koordinatensystem dreht? Hr. Denizot läßt freilich die augenblickliche Rotationsachse des Systems nicht mit der  $z$ -Achse zusammenfallen. Jedoch dies ist belanglos. Er bezeichnet die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bezüglich der Achsen  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  mit  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . Es wird dann

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} J n^2 = \frac{1}{2} p^2 (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} q^2 (z^2 + x^2) + \frac{1}{2} r^2 (x^2 + y^2) \\ \qquad - q ry z - r px z - p q x y. \end{array} \right.^2)$$

Hieraus werden die partiellen Differentialquotienten, das sind die Komponenten der „instantanen Zentrifugalkraft“ der sich bewegenden Massen“ abgeleitet:

$$\frac{1}{2} n^2 \frac{\partial J}{\partial x}, \quad \frac{1}{2} n^2 \frac{\partial J}{\partial y}, \quad \frac{1}{2} n^2 \frac{\partial J}{\partial z}.$$

Aber es ist mir unmöglich, den nun gezogenen Schluß zu verstehen, diese Ausdrücke seien, „wie ohne weiteres zu ersehen, die Komponenten der Zentrifugalkraft, welche durch die *relative*<sup>3)</sup> Drehung des Punktes um die instantane Achse erzeugt wird“. Hierauf wird der Sinn „dieser (scheinbaren) Drehung“ festgestellt und gefunden, daß sie „gerade in dem entgegen-

1) A. Denizot, l. e. p. 306 u. 316.

2) Im Original (p. 304, Gleichung (14)) steht  $\omega$  statt  $n$ .

3) Im Original nicht hervorgehoben.

gesetzten Richtungssinn der absoluten Drehung des beweglichen Koordinatensystems um die instantane Achse stattfindet".

Ich bin gezwungen, diese Schlußweise als die Vorwegnahme von Erfahrungstatsachen (nämlich der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene beim Pendel) zu bezeichnen, deren mathematische Begründung später erfolgen soll. Die Zentrifugalkraft wird nicht durch die *relative Drehung*, sondern durch die *absolute Drehung* des Massenpunktes um die instantane Achse hervorgerufen. Und man kann sich dieselbe auch nicht aus jener entstanden *denken*. Die entsprechenden Komponenten treten überhaupt in den Bewegungsgleichungen (3) nur als Einfluß der Drehung des beweglichen Koordinatensystems um die augenblickliche Achse auf. Ich möchte das Glied  $(J/2)n^2$  bez.  $(r^2/2)n^2$  in (5) eher *Rotationsenergie infolge des beweglichen Bezugssystems* nennen. Eine *relative Drehung braucht überhaupt nicht stattzufinden*. Die ganze von mir gegebene Ableitung (Gleichung (1) bis (5)) bleibt in naturgemäßer Geltung, wenn der Punkt bezüglich des beweglichen Koordinatensystems *ruht*. Alsdann nehmen die Gleichungen (3) die Gestalt an:

$$(3a) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = X + n^2 x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = Y + n^2 y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \end{cases}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den für ein festes Koordinatensystem (mit der Achse  $Oz$ ) gültigen nur dadurch, daß zu den äußeren Kräften noch die Zusatzkräfte  $n^2 x$  nach der  $x$ -Achse und  $n^2 y$  nach der  $y$ -Achse hinzukommen. Es sind dies die Komponenten der Zentrifugalkraft. Diese ist also hier — wo von einer relativen Drehung keine Rede — die einzige Zusatzkraft. Bilden wir analog früherem die Gleichung der scheinbaren lebendigen Kraft, so gelangen wir wieder zu Gleichung (5). Aus dieser soll aber nach Hrn. Denizot à tout prix eine relative Drehung gegen die beweglichen Bezugssachsen zu ersehen sein. Wir haben aber gerade den Fall der Ruhe vorausgesetzt. Dieser Widerspruch löst sich dadurch, daß die Behauptung des Hrn. Denizot unstatthaft ist.

Wir können auch annehmen, daß sich der Punkt in einer durch den Ursprung gehenden, gegen das bewegliche System fixen Geraden bewege. Auch dann darf von einer relativen Drehung nicht gesprochen werden. Und doch röhrt sich das Glied  $(r^2/2)n^2$  bez.  $(J/2)n^2$  in Gleichung (5) nicht vom Platze.

§ 4. Erst die Heranziehung weiterer Gleichungen, die uns neue Einblicke in die Art der Veränderung einzelner Größen gewähren, ermöglicht einen Schluß über die wirkliche Bewegung des Punktes. So kann beispielsweise zu diesem Zwecke die Gestalt der vom Punkte beschriebenen Kurve Dienste leisten. Wohl ist beim Foucaultschen Pendel die Kurvengestalt nicht gegeben. Wir wissen nur, daß der sich bewegende Punkt stets auf einer Kugelfläche bleiben muß, deren Mittelpunkt in dem Aufhängepunkte zu liegen kommt. [Hierbei sehen wir von der Steifheit des Aufhängefadens ab.<sup>1)</sup>] Indessen kennen wir dafür die Richtung der Reaktion (Fadenspannung). [Übrigens ermöglicht uns dies, aus den Gleichungen (3) die Kurvengestalt zu berechnen.]

Aber auch die Kenntnis der kinetischen Energie bezüglich eines festen Koordinatensystems gestattet manchmal im Verein mit der Gleichung (5) eine Orientierung über die wirkliche Bewegung des Punktes. Da dieser Umstand für den speziellen Fall des Foucaultschen Pendels von Bedeutung ist, so sei mir erlaubt, den diesbezüglichen Gedankengang hier des näheren klar zu legen.

Wir nehmen an, daß die Achse  $Oz$  vertikal nach aufwärts gerichtet sei. Wir werden zwei Hauptfälle unterscheiden.

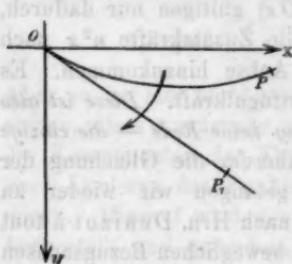


Fig. 1.

1. Der Punkt bleibe bezüglich des festen Koordinatensystems — oder wie wir kurzweg sagen wollen, im Raum — in einer durch den Ursprung  $O$  gehenden vertikalen Ebene. Seine Horizontalprojektion beschreibt alsdann eine durch  $O$  gehende Gerade (Fig. 1). In der beliebigen Zeit  $t$  steht er im Raum vertikal über  $P_1$ , im

1) A. Bravais, Compt. rend. 33. p. 195. 1851.

beweglichen Koordinatensystem über  $P$ . Natürlich decken sich zur Zeit  $t$  die Punkte  $P$  und  $P_1$ . Zur Zeit  $O$  befindet sich der Punkt in  $Oz$ . Die Zunahme der wahren kinetischen Energie des Punktes für die Zeit  $t$  ist gleich der auf dem von der Horizontalprojektion beschriebenen Wege  $OP_1$  geleisteten Arbeit. Wir setzen als einzige, Arbeit verrichtende Kraft nur die Schwere voraus. Der Punkt hätte wieder die Masse 1. Es ist dann

$$\int (X dx + Y dy + Z dz) = \int -g dz = g(h - z) = A,$$

wo sich der Punkt von der Höhe  $h$  zur Höhe  $z$  bewegt. Für  $h = 0$  ist die Arbeit

$$A = -gz.$$

Die Zunahme der scheinbaren kinetischen Energie  $E$  ist infolge der Rotation des Koordinatensystems größer. Bezeichnen wir die Rotationsenergie desselben mit  $F$ , so ist nach Gleichung (5)

$$[E - E_0] - [F - F_0] = A,$$

wo die mit Indizes bezeichneten Größen eine leicht erkennbare Bedeutung haben. Es folgt

$[E - E_0] = A + [F - F_0] >$  Zunahme der wahren kinetischen Energie.  
Oder es ist

$$\begin{aligned} & \text{Zunahme der scheinbaren kinetischen Energie} \\ & = \text{Zunahme der wahren kinetischen Energie} \\ & + \text{Zunahme der Rotationsenergie.} \end{aligned}$$

2. Der Punkt bewege sich z. B. auf einer glatten schießen Ebene derart, daß seine relative Bahn in einer durch die  $z$ -Achse gehenden Ebene gelegen ist. Seine Horizontalprojektion beschreibt dann gegen das bewegliche Bezugssystem eine durch  $O$  gehende Gerade. Im Raum beschreibt der Punkt im allgemeinen eine gewundene Kurve, die für den Fall, daß die relative Bahn gerade ist, einfach gekrümmmt werden wird. Für das feste Koordinatensystem ist jetzt die Arbeit größer als für das bewegliche. Die Zunahme der wahren kinetischen Energie ist aber auch größer als die der scheinbaren. Denn während die Vertikalprojektionen der relativen und wahren Geschwindigkeit gleich sind, kommt zur Horizontalprojektion der ersteren längs  $OP$  die dazu senkrecht stehende Umfangs-

geschwindigkeit infolge der Rotation um die  $z$ -Achse. Die Änderung der wahren kinetischen Energie wird daher um die Änderung der Rotationsenergie des beweglichen Systems größer sein als die Änderung der scheinbaren kinetischen Energie.

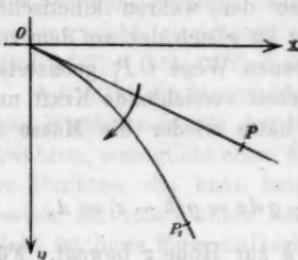


Fig. 2.

Es ist mit einem Wort in den Fällen 1. und 2. die Rolle der scheinbaren und wahren Bewegung vertauscht. Bezeichnet  $A$  wieder die unter dem Einfluß der Schwere auf dem der Horizontalprojektion  $OP_1$  entsprechenden Wege geleistete Arbeit ( $A = g(h - z)$  bez.  $= -gz$ ), und bleibt die Bedeutung der Buchstaben  $E$  und  $F$  unverändert, so ist nach Gleichung (5)

$$[E - E_0] - [F - F_0] = A,$$

$$[E - E_0] = A + [F - F_0] < \text{Zunahme der wahren kinetischen Energie.}$$

Diese Zunahme ist

$$[E - E_0] + [F - F_0].$$

Es ist demnach

$$\begin{aligned} &\text{Zunahme der scheinbaren kinetischen Energie} \\ &= \text{Zunahme der wahren kinetischen Energie} \\ &- \text{Zunahme der Rotationsenergie.} \end{aligned}$$

3. Bleibt der Punkt weder im Raume noch gegen das bewegliche Bezugssystem in einer vertikalen Ebene, oder ist das Verhältnis der Arbeiten für das feste und das bewegliche Koordinatensystem kein solch einfaches wie im Fall 1. und 2., so läßt uns im allgemeinen diese Betrachtungsweise im Stich. Hiermit sei indes nicht behauptet, daß vielleicht doch noch der eine oder andere spezielle Fall seine Lösung finden könne.

§ 5. Wir gehen über zu dem Verhalten des Foucaultschen Pendels. Wir wählen unseren Standpunkt in Übereinstimmung mit dem eben dargelegten vorerst am Nordpol. Die Vertikale daselbst ist die Achse  $Oz$ . Die Ebene der Achsen  $Ox$  und  $Oy$  ist die Horizontalebene.  $Ox$  und  $Oy$  sind

mit der Erde fest verbunden. Die Gleichungen für dieses Bezugssystem sind

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\omega \frac{dy}{dt} - \omega^2 x = -R \frac{x}{l}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - 2\omega \frac{dx}{dt} - \omega^2 y = -R \frac{y}{l}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + R \frac{l-z}{l}. \end{cases}$$

Hierin ist  $\omega$  die Erdwinkelgeschwindigkeit,  $l$  die Pendellänge,  $R$  mal der Masse des Pendelkörpers die Fadenspannung. Es lassen sich diese Gleichungen ohne weiteres aus den Gleichungen (3) herleiten, wenn man  $n = -\omega$  setzt und die speziellen Werte für die beschleunigenden Kräfte substituiert. Diese Kräfte sind hier  $R$  und die Schwerkraft  $g$ .

Wir legen nun im Raum ein Koordinatensystem ( $O\xi\eta\zeta$ ) fest. Die  $\zeta$ -Achse falle mit der  $z$ -Achse zusammen. Zwischen den Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $\xi$ ,  $\eta$  besteht der Zusammenhang, wenn  $t$  die Zeit bedeutet,

$$x = \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t,$$

$$y = \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen ergeben die Gleichungen (7) folgende, übrigens selbstverständliche Gleichungen

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -R \frac{\xi}{l}, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -R \frac{\eta}{l}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + R \frac{l-z}{l}. \end{cases}$$

Aus (7) folgt

$$(9) \quad \left[ \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right] - \frac{\omega^2}{2} [r^2 - r_0^2] = -g(z - h),$$

$h$  bedeutet die den Werten  $v_0$  und  $z_0$  entsprechende  $z$ -Koordinate. Aus (8) folgt

$$(10) \quad \left[ \frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right] = -g(z - h).$$

$V$  bezeichnet die wahre Geschwindigkeit des Punktes im Raum.

Aus dem Vergleiche der Ausdrücke (9) und (10) folgt

$$\left[ \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right] = \left[ \frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right] + \frac{\omega^2}{2} [r^2 - r_0^2].$$

Diese Beziehung entspricht dem obigen Fall (1), d. h. die Schwingungsebene des Pendels bleibt im Raume unverrückt. In einer Ausdehnung dieser Ableitung auf elliptische Schwingungen, wie solche in Wirklichkeit allgemein stattfinden werden<sup>1)</sup>, sehe ich kein Hindernis. Man kann bei diesen *schmalen* Ellipsen die Vertikalebene durch die große Achse schlechthin als Schwingungsebene bezeichnen.

§ 6. Verfehlt wäre es aber, aus der eben gegebenen Schlußweise deduzieren zu wollen, daß die in den Gleichungen (7) mit  $\omega^2$  behafteten Glieder, das Ausschlaggebende für die Gestalt der vom Pendel beschriebenen Bahn, also für die Drehung der Schwingungsebene wären, weil die Rotationsenergie nur von ihnen abhinge und weil die Coriolisschen Beschleunigungen  $2\omega(dy/dt)$  und  $-2\omega(dx/dt)$  herausfielen. Denn über die Gestalt der Bahn und die dieselbe verursachende Kraft geben die Energiegleichungen gar keinen Aufschluß. Sie sagen nur, daß der Unterschied zwischen der wahren und scheinbaren Bahn des sich bewegenden Punktes in der Drehung des beweglichen Koordinatensystems liege, durch welche Drehung die Rotationsenergie hervorgerufen werde. Also alt bekanntes. Wäre wirklich, wie Hr. Denizot behauptet<sup>2)</sup>, die augenblickliche Zentrifugalkraft das Wesentliche, und käme wirklich der Coriolisschen Kraft nur die Bedeutung eines störenden Einflusses zu, so müßte das eine Vernachlässigung dieser in den Gleichungen (7) leicht erweisen. Tut man so, so nehmen die Gleichungen (8) die Gestalt an

$$(8a) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega\frac{d\eta}{dt} - 2\omega^2\xi = -R\frac{\xi}{l}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega\frac{d\xi}{dt} - 2\omega^2\eta = -R\frac{\eta}{l}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g + R\frac{l-\xi}{l}. \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn  $V$  dieselbe Bedeutung wie oben besitzt,

$$(10a) \quad \left[ \frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right] - 2\frac{\omega^2}{2}[r^2 - r_0^2] = -g(z - h).$$

1) O. Röthig, l. c. p. 157 ff.

2) A. Denizot, l. c. p. 318, § 26 und Physik. Zeitschr. 6. p. 342 u. 677. 1905, sowie die Berichtigung 6. p. 745. 1905.

Diese Gleichung liefert in Verein mit Gleichung (9)

$$\left[ \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right] = \left[ \frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right] - \frac{\omega^2}{2} [r^2 - r_0^2],$$

und dieser Ansatz entspricht dem obigen Fall 2., d. h. das Pendel würde sich überhaupt nicht gegen die Erde bewegen.<sup>1)</sup> Damit fällt die Behauptung des Hrn. Denizot auf p. 317 seiner Abhandlung: „Die instantane Achse fällt (am Nordpol) mit der z-Achse zusammen und durch diese fingierte Zentrifugalkraft wird die scheinbare Drehung der Bewegungsebene des Körpers um die Erdachse, und zwar im umgekehrten Sinne der Erddrehung erklärt.“ Dieses Resultat steht in vollkommener Übereinstimmung mit dem oben in § 3 behandelten speziellen Fall eines Punktes, der sich in relativer Ruhe gegen das bewegliche Bezugssystem befindet.

[Der Vollständigkeit halber sei noch der Abänderungen gedacht, die sich im Rechnungsverfahren ergeben, wenn wir in (7) die Zentrifugalkraft vernachlässigen und nur die Coriolische Kraft beibehalten. Die Gleichungen (8) werden zu

$$(8 b) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega^2 \xi = -R \frac{\eta}{l}, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \omega^2 \eta = -R \frac{\zeta}{l}, \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -g + R \frac{l-\xi}{l}. \end{cases}$$

Aus ihnen folgt

$$(10 b) \quad \left[ \frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right] + \frac{\omega^2}{2} [r^2 - r_0^2] = -g(z - h).$$

Ferner wird die Gleichung (9) zu

$$(9 a) \quad \left[ \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right] = -g(z - h).$$

Die Gleichungen (9 a) und (10 b) ergeben

$$\left[ \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right] = \left[ \frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right] + \frac{\omega^2}{2} [r^2 - r_0^2].$$

Wie früher folgt daraus, daß die Schwingungsebene im Raume ihre Lage unverrückt beibehält.]

1) Ich habe auf diesen Punkt bereits in einem demnächst in der Physik. Zeitschr. erscheinenden Aufsatz hingewiesen. Allerdings ist dort die Schlußweise anders.

Anhangsweise sei bemerkt, daß in dem Falle, wo keine Drehung der Pendelebene infolge Hinausfallens der Coriolischen Kraft eintritt, dies physikalisch dahin zu deuten ist, daß äußere Kräfte zur Geltung kommen, die der Coriolisschen Kraft an Größe gleich sind, aber entgegengesetzten Richtungssinn besitzen. Die angestellten Betrachtungen werden bei Verwendung von Polarkoordinaten durchsichtiger.<sup>1)</sup> Doch behielt ich, um in Übereinstimmung mit Hrn. Denizot zu bleiben, ein rechtwinkliges Koordinatensystem bei.

§ 7. Bei der Durchführung des Foucaultschen Versuches für einen beliebigen Punkt der Erdoberfläche, welcher die geographische Breite  $\varphi$  besitzt, kann natürlich ebensowenig aus der Gleichung der scheinbaren kinetischen Energie allein auf eine relative Bewegung der Schwingungsebene geschlossen werden wie für einen Punkt am Pol. Hier ist es aber auch nicht möglich, sich durch einfache Überlegungen — wie die oben gegebenen — auf die Gleichung der wahren kinetischen Energie zu stützen. Denn wählen wir je ein festes und bewegliches Achsensystem, deren gemeinsame  $z$ -Achse die Erdachse ist, so liegt der Aufhängepunkt des Pendels nicht mehr in der Achse  $Oz$ . Wählen wir aber ein bewegliches Bezugssystem, dessen  $z$ -Achse die Vertikale des Beobachtungsortes ist, so wird keine seiner Achsen mit einer Achse des festen Systems übereinstimmen. In beiden Fällen lassen uns die obigen Überlegungen im Stich.

§ 8. Im nachfolgenden möchte ich mir noch erlauben, auf einige Punkte der Abhandlung von Hrn. Denizot des näheren einzugehen. Hr. Denizot leitet — um die Lagrange-schen Gleichungen benutzen zu können — einen Ausdruck für die kinetische Energie ab, der mir nicht allzu physikalisch durchsichtig erscheint. Um so mehr als die Komponenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit erst nachträglich erklärt werden müssen.<sup>2)</sup> Ich würde den nachstehend skizzierten

1) Man vgl. L. Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik 2. p. 311. 1904.

2) Dieses Vorganges bedient sich auch Quet in seiner großen Arbeit: Des mouvements relatifs . . . Liovilles Journ. 18. p. 213. 1853. Man lese übrigens wegen der „Häufung von Richtungskosinussen und Indizes“ die sehr zu beherzigenden Worte von H. Lorenz in seinem Lehrbuche der techn. Physik 1. p. 615. 1902.

Weg vorziehen. Das bewegliche Koordinatensystem sei wieder ( $Oxyz$ ). Die Geschwindigkeitskomponenten des Ursprungs  $O$  nach den Achsen seien  $u_0, v_0, w_0$ , die Winkelgeschwindigkeitskomponenten nach den Achsen mögen  $p, q, r$  heißen. Dann ist die wahre kinetische Energie eines sich bewegenden Körpers<sup>1)</sup>

$$T = \frac{1}{2} \sum m \left\{ \left( \frac{dx}{dt} - ry + qz + u_0 \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} - pz + rx + v_0 \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} - qx + py + w_0 \right)^2 \right\}.$$

$R$  bedeute die lebendige Kraft der Relativbewegung,  $N$  die Winkelbewegungsgröße der Relativbewegung um die augenblickliche Achse des beweglichen Bezugssystems;  $R_0$  und  $N_0$  hätten die analoge Bedeutung, wenn die Geschwindigkeit jedes Punktes im Körper ersetzt wird durch die Geschwindigkeit des Punktes  $O$ .  $J$  sei das Trägheitsmoment des Körpers um die augenblickliche Achse;  $n$  sei die resultierende Winkelgeschwindigkeit der Bezugssachsen. Dann ist

$$T = R + Nn + \frac{1}{2} J n^2 + R_0 + N_0 n + \sum m \left( u_0 \frac{dx}{dt} + v_0 \frac{dy}{dt} + w_0 \frac{dz}{dt} \right).$$

Hat der Ursprung ferner die Beschleunigungskomponenten  $\alpha, \beta, \gamma$  nach den drei beweglichen Achsen, so sind diese im entgegengesetzten Richtungssinn an jedem Punkte des Systems anzubringen, um den Ursprung in den Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung zu setzen. Diese parallelen, den Massen der einzelnen Punkte proportionalen Kräfte liefern eine am Schwerpunkte des Körpers angreifende Resultierende. Hierdurch kommt zur Kräftefunktion  $U$  des Systems ein Glied von der Beschaffenheit

$$K = -M(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma \bar{z}).$$

Hierin ist  $M$  die Gesamtmasse, und  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  sind die Schwerpunktskoordinaten. Die drei Geschwindigkeitskomponenten  $u_0, v_0, w_0$  des Ursprungs  $O$  sind dann entweder Null (der

1) Man vgl. hierzu E. J. Routh, I. c. 2. p. 41. 1898. Ich skizziere hier das Verfahren aus dem Grunde, weil in der dortigen Entwicklung von vornherein die Komponenten der nach Einführung der Funktion  $K$  gleichförmigen Ursprungsgeschwindigkeit weggelassen sind.

Ursprung ist in Ruhe), oder sie sind die Komponenten einer konstanten Geschwindigkeit von gleichbleibender Richtung (der Ursprung bewegt sich gleichförmig und geradlinig). Die Lagrangesche Funktion wird lauten

$$L = R + N n + \frac{1}{2} J n^2 + R_0 + N_0 n \\ + \sum m \left( u_0 \frac{dx}{dt} + v_0 \frac{dy}{dt} + w_0 \frac{dz}{dt} \right) + U + K.$$

Hieraus erhalten wir für den Sonderfall eines sich bewegenden *punktförmigen* Körpers

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3 x}{dt^3} = X + 2 \left( r \frac{dy}{dt} - q \frac{dz}{dt} \right) + \frac{1}{2} n^2 \frac{\partial J}{\partial x} \\ \qquad \qquad \qquad + \left( y \frac{dr}{dt} - z \frac{dq}{dt} \right) - \alpha. \end{array} \right.$$

Hierin ist die  $x$ -Komponente der äußeren Kraft

$$MX = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

In der Gleichung (11) sind, wie eine einfache Rechnung ergibt, die mit  $u_0, v_0, w_0$  behafteten Glieder herausgefallen. Es führt dies daher, daß nach der Anbringung der Kraft von den Komponenten

$$\frac{\partial K}{\partial x}, \quad \frac{\partial K}{\partial y}, \quad \frac{\partial K}{\partial z},$$

die Beschleunigungskomponenten des Ursprungs nach den Achsen Null sind: Er bewegt sich gleichförmig geradlinig oder ist in Ruhe.

Übrigens läßt sich die Einführung der Funktion  $K$  vermeiden, wenn man  $u_0, v_0, w_0$  als die Komponenten der wahren, also veränderlichen Geschwindigkeit des Ursprungs nach den Achsen ansieht. Dann ist

$$\alpha = \frac{du_0}{dt} - v_0 r + w_0 q.$$

$\beta$  und  $\gamma$  ergeben sich hieraus durch zyklische Vertauschung.<sup>1)</sup> Bei Einführung der Kräftefunktion  $K$  ist die rechte Seite dieser Gleichungen Null.

Die Bedeutung des Ausdrückes  $\frac{1}{2} n^2 (\partial J / \partial x)$  wurde bereits oben diskutiert.

1) L. Boltzmann, l. c. 2, p. 827. 1904.

Der erste Klammerausdruck rechts in der Gleichung (11) stellt die Komponente der sogenannten Coriolisschen Kraft nach der Achse  $Ox$  dar. Den zweiten Klammerausdruck nennt Hr. Denizot die  $x$ -Komponente der „instantanen Tangentialkraft“. Dieser Name scheint mir nicht glücklich gewählt, da ja diese Kraft im allgemeinen nicht Tangente an die von dem sich bewegenden Punkte beschriebene Bahn ist. Sie steht einerseits normal zu dem nach dem Ursprung gezogenen Radiusvektor, andererseits auf der augenblicklichen Winkelbeschleunigung des Bezugssachsensystems. L. Boltzmann gebraucht hierfür wohl auch den Namen tangentiale Reduktionskraft. Doch findet dieser Gebrauch dort seine Erklärung in der Verwendung semipolarer Koordinaten.<sup>1)</sup>

§ 9. Hr. Denizot leitet<sup>2)</sup> die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines sich auf der Erdoberfläche verschiebenden Punktes ab, welche Gleichungen sich — wie mit Recht bemerk ist — mit den von Poisson<sup>3)</sup> seinerzeit gegebenen decken. Es ist aber dabei wohl im Auge zu behalten, daß Poisson den Ursprung des beweglichen Koordinatensystems direkt auf der Erdoberfläche annimmt, Hr. Denizot hingegen in einer gewissen Entfernung über derselben. Wir wollen diese Entfernung mit  $l$  (Pendellänge) bezeichnen. Des weiteren benutzt aber Hr. Denizot Ausdrücke für die Komponenten der Schwerkraft, welche als nicht passend bezeichnet werden müssen, und die daher auch zu fehlerhaften Gleichungen führen. Auf diesen Umstand hat bereits Hr. Rudzki<sup>4)</sup> hingewiesen, indem er zeigt, daß diese Gleichungen für den Sonderfall des ruhenden Pendels ein falsches Resultat ergeben. Auch ich war genötigt, diesen Umstand in einem demnächst in der Physikalischen Zeitschrift erscheinenden Aufsatz zu betonen. Wenn sich jedoch Hr. Denizot über diese Einwürfe mit den Worten hinwegsetzt, daß diese Bemerkungen auf eine „auffällige Verwechslung der Begriffe der Ruhe und der Bewegung hinauskommen“, so ist dies ganz entschieden zurückzuweisen.

1) L. Boltzmann, l. c. 2. p. 313. 1904.

2) A. Denizot, l. c. p. 312, § 19.

3) S. D. Poisson, Journ. de l'École Polyt. 26. p. 15. 1888.

4) A. Denizot, Physikal. Zeitschr. 6. p. 559 und p. 745. 1905;

M. P. Rudzki, Physikal. Zeitschr. 6. p. 679. 1905.

Hr. Denizot gibt nämlich als die Schwerkraftkomponenten im Punkte  $O$  folgende Ausdrücke (man vgl. Fig. 3):

$$X - \omega^2 h \sin \varphi = 0,$$

$$Y = 0,$$

$$Z - \omega^2 h \cos \varphi = g.$$

Dies ist an und für sich richtig. Doch für das Pendel kommen nicht diese für  $O$  geltenden Komponenten in Betracht, sondern (bei der Pendellänge  $l$ ) die für die Gleichgewichtslage  $A$  des Schwingungsmittelpunktes gültigen Komponenten

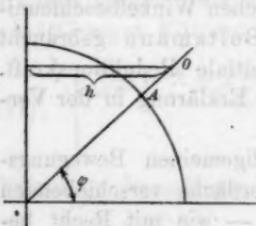


Fig. 3.

$$X - \omega^2(h - l \cos \varphi) \sin \varphi = 0,$$

$$Y = 0,$$

$$Z - \omega^2(h - l \cos \varphi) \cos \varphi = g.$$

Werden diese Werte in die allgemeinen Bewegungsgleichungen des Hrn. Denizot eingesetzt, so erscheint auch das ruhende Pendel — wie ganz natürlich — als Sonderfall des sich bewegenden, ohne daß deshalb den Bewegungsgleichungen (für diesen speziellen Fall) Gewalt angetan werden müßte. Poisson, der übrigens bei der weiteren Behandlung seiner Gleichungen die Glieder von der Ordnung  $\omega^3$  vernachlässigt, bezieht auch ausdrücklich die Schwerkomponenten auf einen Punkt der Erdoberfläche.<sup>1)</sup>

§ 10. Hrn. Denizots Behauptung, daß die Größe der Amplitude der Schwingungen gar keinen Einfluß auf das Drehungsgesetz der Schwingungsebene besitze, welche Behauptung mit dem bisherigen theoretischen und praktischen Erfahrungsmateriale im Widerspruch steht, fällt mit seiner ganzen Theorie.<sup>2)</sup>

Hr. Denizot greift ferner auf den *Zeichenwechsel der Coriolisschen Kraft* mit dem der Geschwindigkeit zurück und erklärt hieraus die Unmöglichkeit, daß diese Kraft die die Drehung verursachende sein könne. Ich habe in den bereits

1) S. D. Poisson, l. c. p. 17.

2) Im übrigen verweise ich auf meine Arbeiten: 1. Physik. Zeitschr. 6. p. 556. 1905 und 2. Physik. Zeitschr. im Erscheinen.

zitierten Arbeiten indessen dargetan, daß eben gerade dieser Zeichenwechsel erst die Wirkung der Coriolisschen Kraft ermöglicht. Wäre der Zeichenwechsel nicht vorhanden, erst dann vermöchte eine Drehung der Schwingungsebene infolge ihrer nicht einzutreten.

Daß die schleifenartige Figur, bei welcher die Hin- und Herschwingung des Pendels stets durch die Ruhelage geht und die z. B. bei den ersten Schwingungen des Pendels beim Wiener Versuch (im Oktober 1903) aufgetreten ist<sup>1)</sup>, ihre volle Erklärung durch die bisherige auf Binet und anderen fußende Theorie findet, ist auf Grund einer einfachen Zeichnung leicht klarzumachen.<sup>2)</sup> Es erfordert dies allerdings eine nach Röthig unmögliche Schwingung des Pendels in einer Ebene (zur Erde). Man hat aber zu berücksichtigen, daß einerseits bei derartigen Schwingungsformen die Konstruktion der Aufhängevorrichtung eine besondere ist, und daß andererseits jene Geschwindigkeit, welche das Pendel schon aus seiner Ruhelage infolge der Erd-drehung mitbringt, nur sehr *schmale* Ellipsen verursachen wird.

Hr. Denizot geht aber weiter. Er kennt zuerst der Coriolisschen Kraft eventuell einen gewissen störenden Einfluß zu, um kurz darauf zu sagen:<sup>3)</sup> „Ob überhaupt eine Wirkung der Coriolisschen Kraft in diesem Falle auftritt, ist sehr zu bezweifeln.“ Ich behaupte nach wie vor das Gegenteil: *Die Coriolissche Kraft ist die primäre Ursache, der augenblicklichen Zentrifugalkraft kommt nur die Bedeutung einer störenden sekundären Kraft zu.* Bislang konnte mich keiner der vorgebrachten Einwände von dieser Ansicht auch nur einen Schritt weit verdrängen.

Die wiederholte Berufung von Hrn. Denizot auf eine Stelle in Poisson<sup>4)</sup>, ist wohl völlig hinfällig, weil erstens Poisson diese Stelle lange vor dem Foucaultschen Experimente niedergeschrieben hat, also überhaupt jede Drehung der Schwingungsebene leugnete, und weil zweitens Poisson selbst die Glieder von der Größenordnung  $\omega^2$  vernachlässigte.

1) Ich verdanke die Mitteilung dieses Umstandes der Liebenswürdigkeit des Hrn. Ing. Rud. Pozděna (Klosterneuburg bei Wien).

2) Ich muß neuerdings auf die zweite meiner Arbeiten verweisen.

3) A. Denizot, l. c. p. 318 u. p. 319, § 26.

4) S. D. Poisson, l. c. p. 24.

§ 11. Hr. Denizot zitiert mehrmals die oben genannte Arbeit von Röthig. Auf p. 300 seiner Abhandlung schreibt er: „Auf eine Unzulänglichkeit der Binetschen Gleichungen infolge der weggelassenen Glieder hat übrigens O. Röthig bereits aufmerksam gemacht; indes sind diese unberücksichtigten Glieder bis jetzt niemals Gegenstand eines eingehenderen Studiums gewesen.“ Auf p. 319: „Die üblichen, für unendlich kleine Schwingungen auf Grund der Binetschen Gleichungen gemachten Näherungsrechnungen gelten nur für einen Teil der unendlich kleinen Schwingung und können weiter nichts ergeben als die Richtung der während dieses Teiles der unendlich kleinen Schwingung vorhandenen Coriolisschen Kraft, die bei Umkehr der Bewegungsrichtung die entgegengesetzte Richtung annimmt. Die Unrichtigkeit des gewöhnlichen elementaren Beweises der ‚Unveränderlichkeit der Schwingungsebene‘, ‚der kaum für eine unendlich kleine Zeit und höchstens dafür allein gültig ist‘, hebt besonders Röthig hervor, doch scheint dieses wenig Beachtung gefunden zu haben.“ Hr. Denizot möge verzeihen, aber ich bin genötigt, gegen diese Art der Belegung seiner Arbeit mit Zitaten Stellung zu nehmen. Röthigs leitender Gedanke steht geradezu in Gegensatz zu seinem. Röthig tritt unter anderen auf gegen die sogenannten Schulbeweise des Foucaultschen Pendelversuches. Seine Worte: „Wer nicht gewöhnt ist, Beweise auf Autoritätsglauben hin anzunehmen, wer sich noch etwas Kritik bewahrt hat, wird bald die Schwächen dieses sogenannten Beweises erkennen, der kaum für eine unendlich kleine Zeit und höchstens dafür allenfalls gültig ist“, gelten nicht dem Binetschen Beweise (wie man nach den von mir angeführten Stellen des Hrn. Denizot auf den ersten Anschein hin annehmen könnte), sie gelten den Scheinbeweisen der Schule. Röthig zitiert die Arbeiten von Dumas<sup>1)</sup>, Hansen<sup>2)</sup> und insbesondere die von Lottner.<sup>3)</sup> Aus letzterer Arbeit, welche

1) W. Dumas, Crelles Journal 50. p. 52. 1855.

2) P. A. Hansen, Pogg. Ann. 92. p. 21. 1854. Im Auszuge. Mir ist — ebenso wie seinerzeit Röthig — nur dieser Auszug bekannt. Die Originalarbeit findet sich in den Schriften der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig. V. 1. Heft.

3) E. Lottner, Crelles Journal 52. p. 52. 1856. Röthig zitiert auch noch Schellbach „Neue Elemente der Mechanik“. Leider ist es

nebenbei bemerkt infolge Verwechselung der Begriffe der Erdanziehung und Schwere zu unrichtigen Ergebnissen führt, ist leicht zu entnehmen, welcher Art die gemeinten Schulbeweise sind. Lottner verweist nämlich auf das Lehrbuch der Physik von Joh. Müller. Diese Arbeit Röthigs hat auch ihre guten Früchte getragen. Freilich habe ich sie noch nirgend anders zitiert gefunden. Aber die Unzulänglichkeit der Schulbeweise hat schon eine ganze mehr oder minder gehaltreiche Literatur gezeitigt. Ich verweise auf die diesbezüglichen Artikel in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, insbesondere auf die gehaltvollen Aufsätze von M. Koppe (I. und X. Jahrgang), auf die in den Vierteljahresberichten des Wiener Vereins zur Förderung des physikalischen und chemischen Unterrichts etc. Doch dieses nur so nebenbei. Aus den oben angegebenen Stellen muß der Leser die Meinung gewinnen, daß Röthig gegen die Binetsche Beweisform Stellung nimmt. Dem ist aber durchaus nicht so. Wohl schreibt er: „Aber ohne es irgendwo zu sagen, vernachlässigt Binet in den Poissonschen Gleichungen alle Glieder mit dem Faktor  $n^2$ , wo  $n$  die Winkelgeschwindigkeit der Erde bedeutet“ und „Binet behandelt daher das Problem von vornherein nur näherungsweise“, sowie endlich „Es bleibt nur das näherungsweise richtige, von Binet durch den Kalkül gefundene Resultat, welches oben in einer Form gegeben wurde, die geeignet ist, der Vorstellung zu Hilfe zu kommen. Allerdings ist die Ellipse, von der dort gesprochen wurde, im allgemeinen so lang gestreckt, daß sie dem Beobachter meistens als gerade Linie erscheinen wird. Und sobald oder soweit dies geschieht, gilt das sogenannte Sinusgesetz. Wann aber und in welchem Umfange oder für welchen Grad der Näherung dies geschieht, kann durch nichts anderes entschieden werden, als durch die Rechnung, und es gibt keine andere Methode, qui donne tout ce que peut donner le calcul.“ Und damit sind wir im Kernpunkte der Arbeit. Röthig gebraucht die letzten Worte, die ursprünglich Liouville<sup>1)</sup> ge-

---

mir trotz aller Bemühungen nicht gelungen, in dieses Buch Einsicht nehmen zu können.

1) J. Liouville, Compt. rend. 32. p. 159. 1851.

sprochen, ironisch, indem er nachzuweisen sucht, daß die auch von Hrn. Denizot angeführten Behauptungen von Liouville und Poinsot<sup>1)</sup>, daß das Sinusgesetz streng auf geometrischem Wege zu beweisen wäre, nicht aufrechtgehalten werden können.

Ich bin mir übrigens aus der Röthigschen Arbeit nicht völlig klar, ob er die strenge Geltung des Sinusgesetzes nur darum für unmöglich hält, weil das Pendel stets als *Kegelpendel* zu schwingen gezwungen ist. Dieser Ansicht könnte ich naturgemäß nicht beipflichten. Auch entspricht es seinen Überlegungen nicht, daß es unter Umständen möglich wäre, daß das Pendel auf den Polen in *einer Ebene* schwänge und trotzdem eine Drehung der Schwingungsebene einträte.<sup>2)</sup> Uneschmälert bleibe aber Röthigs Verdienst als einer der ersten, einerseits gegen die elementaren Scheinbeweise losgezogen zu sein, und andererseits auf die Unmöglichkeit *einfacher geometrischer* Beweise hingewiesen zu haben.

Olmütz, 13. Dezember 1905.

1) L. Poinsot, Compt. rend. 32. p. 206. 1851.

2) Man vgl. M. Koppe, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unt. 1. p. 20. 1887.

(Eingegangen 14. Dezember 1905.)

**7. Über die Färbung  
von Edelsteinen durch Radium;  
von A. Miethe.**

Wiederholt sind Färbungen anorganischer Substanzen durch Kathoden- und Radiumstrahlen beobachtet worden. Glas färbt sich durch Bestrahlung mit Radium stark braun bez. violett, Chlornatrium färbt sich graubraun und Chlor-kalium je nach Umständen und Reinheit bräunlich bez. gelb. Es lag nahe, die natürlichen durchsichtigen Mineralien, welche zu Schmucksteinen Verwendung finden, einer Bestrahlung mit Radium auszusetzen, wie es bereits Crookes mit dem Diamanten versucht hatte.

Bei diesen Versuchen stellte sich heraus, daß eine unerwartet große Anzahl von Edelsteinen durch kürzere oder längere Bestrahlung mit stark radioaktiven Präparaten ihre Färbung ändern. Irgendwelche gemeinsamen Gesichtspunkte konnten dabei vorerst nicht ermittelt werden, nur soviel läßt sich aus der großen Reihe der ermittelten Tatsachen ableiten, daß die Färbung wesentlich bei hell gefärbten Steinen leicht und auffällig geändert wird, während stark gefärbte Mineralien geringe bez. gar keine Farbänderung zeigen. Vielleicht kann man diese Tatsache mit der den Mineralogen bekannten Erfahrung in Verbindung bringen, daß hell gefärbte Edelsteine häufig keinerlei chemische Beimischungen erkennen lassen, die die Färbung bedingen, während bei dunklen Färbungen färbende Metallsalze oder auch angeblich organische Körper aus der Reihe der Kohlenwasserstoffe sich als färbendes Prinzip nachweisen lassen. Vielleicht sind die beobachteten Tatsachen später geeignet auf die Natur der Färbungen solcher Mineralien einen Schluß zu ziehen, welche in verschiedenen lichten

Färbungen vorkommen, und bei denen sich ein färbendes Prinzip chemisch nicht nachweisen lässt.

Dem Versuche wurden teils geschliffene, teils rohe Edelsteine unterworfen, die möglichst ihrem Fundorte nach genau bekannt waren. Es wurde zur Bestrahlung einerseits eine größere Menge eines sehr stark radioaktiven Baryumbromides benutzt, welches in zwei durch dünne Aluminiumfolien bedeckten Dosen oberhalb und unterhalb der zu untersuchenden Steine angebracht wurde. Das benutzte radioaktive Baryumpräparat wog im ganzen etwa 4 g und durfte etwa 30 mg reines Radiumbromid enthalten. Ferner wurden 60 mg reines Radiumbromid benutzt, welches ebenfalls in zwei Dosen unter Glimmerblättchen aufbewahrt wurde. Letzteres Präparat verdanke ich der Güte des Hrn. Rubens, der es mir für diesen Zweck freundlichst zur Verfügung stellte. Im einzelnen wurden folgende Beobachtungen gemacht:

1. *Diamant*. a) Farbloser Stein von Borneo. Es zeigte sich nach achttägiger Bestrahlung mit dem erstgenannten Präparat eine leichte Gelbfärbung, die nach weiterer achttägiger Bestrahlung in ein leuchtendes Zitronengelb überging. Durch nachträgliches Erhitzen des Steines auf 250° wurde die gelbe Färbung verringert. Es konnte aber selbst durch Rotglühhitze der Stein nicht wieder vollkommen entfärbt werden.

b) Farbloser *Diamant* aus Brasilien. Nach 14 tägiger Bestrahlung keine Veränderung. Nach weiteren 14 Tagen Bestrahlung mittels des reinen Radium bromides keine Veränderung.

2. *Korund*. Der Behandlung wurde eine große Reihe verschieden gefärbter Korunde unterworfen. Hier zeigten sich sehr eigentümliche Verhältnisse:

a) Hellblauer Saphir aus Ceylon. Schon nach zweistündiger Bestrahlung mit reinem Radiumbromid zeigt der Stein eine deutliche Farbenveränderung. Er wandelt sich allmählich aus Grün in helles Gelb um, welch letzte Farbe in ein tiefes Goldgelb mit rötlichem Stich übergeht; die Färbung schreitet von außen nach innen fort. Ein stationärer Zustand wird nach etwa 14 Tagen erreicht. Der Stein ist dann dunkelgelb gefärbt mit einem Stich ins Kastanienbraune. Durch Er-

hitzen auf diejenige Temperatur, bei welcher die hellblaue Farbe ceylonischer Saphire verschwindet, wird der Stein farblos und bei allmählichem Abkühlen zunächst bläulich, dann wieder farblos und schließlich hellgelb. Diese letztere Farbe ist selbst nach Erhitzen auf Rotglut nicht mehr zu beseitigen. Der ausgeglühte Stein färbt sich wieder nach einigen Stunden der Bestrahlung dunkelgelb. Durch Aufbewahren während 14 Tage an einem mäßig warmen Ort bleicht derselbe langsam aus, behält aber eine schöne goldgelbe Farbe, die unveränderlich zu sein scheint.

b) Zehn verschiedene helle, bläuliche oder farblose *Saphire* aus Ceylon; Verhalten wesentlich wie unter a). Die Steine nehmen allerdings sehr verschieden schnell gelbe oder orangegelbe Farbe an. Diese Farben sind haltbar und verändern sich scheinbar nicht, wenn die Steine nicht wie unter a) erhitzt werden. In einzelnen Fällen bleiben kleine blaue Stellen, die der ursprünglichen Farbe entsprechen, zurück. Im allgemeinen aber nehmen die Steine eine sehr gleichmäßige schöne Färbung an.

c) Zahlreiche dunkle Saphire aus Siam, Australien, Kaschmir, von der Isarwiese, sowie aus Colorado zeigen keine Farbenänderung.

d) Roter *Korund* (Rubin) aus Birma. Es wurde ein dunkelroter und ein etwas hellerer Stein 12 Tage lang bestrahlt. Eine Veränderung der Farbe konnte nicht nachgewiesen werden. Beim Erhitzen der Steine auf etwa  $250^{\circ}$  tritt eine schwache Lumineszenz auf. Neben diesen natürlichen Rubinen wurden eine Reihe von künstlich dargestellten Rubinen verschiedenen Ursprungs, die mit Chrom gefärbt waren, untersucht; ein angeblich von Fremy hergestellter Kristall geht etwas ins Violette, doch zeigt selbst wochenlange Bestrahlung keine weitere Veränderung.

e) Dunkler Rubin aus Siam. Selbst nach langer Bestrahlung keinerlei Farbenveränderung.

f) Grüner *Korund* aus Ceylon. Der schön grasgrüne Stein zeigt nach 20 tägiger Bestrahlung eine schwache Trübung ohne merkbare Farbenveränderung. Bei starker Erhitzung schwache Lumineszenz.

g) Violetter *Korund* aus Ceylon. Der ziemlich hell gefärbte Stein verändert seine Farbe nach 20 tägiger Bestrahlung in ein schmutziges Graublau. Die Farbenveränderung bleibt nach starkem Erhitzen bestehen. Schwache Lumineszenz.

8. *Beryll*. a) *Smaragd* aus Columbia. Der dunkelgrüne Stein wird nach einigen Tagen heller und erreicht schließlich eine sehr hellgrüne Farbe. Das Absorptionsspektrum ist genau dasselbe geblieben wie beim unveränderten Stein, doch sind die Absorptionsstreifen wesentlich schwächer geworden. Erwärmung auf  $250^{\circ}$  bringt keine Veränderung.

b) *Beryll* aus Mursinka (Rußland). Der hellgelb gefärbte Stein zeigt keine Veränderung.

c) *Beryll* aus Brasilien. Der hellblaue Stein zeigt keine Veränderung.

4. *Topas*. a) Farbloser *Topas* aus Brasilien. Nach mehrstündiger Bestrahlung mit reinem Radiumbromid färbt sich der Stein hellgelb; die Färbung geht selbst nach wochenlanger Bestrahlung nicht weiter. Durch Erhitzen auf  $150^{\circ}$  entsteht eine prachtvolle Lumineszenz. Der Stein leuchtet zuerst grau, dann in schnellem Wechsel violett, rubinrot, orangegegelb und graublau. Die Lumineszenz ist unvergleichlich stärker als unter gleichen Umständen beim Flußspat und gewährt einen prachtvollen Anblick. Im Spektroskop zeigen sich zahlreiche Linien, die scharf begrenzt erscheinen; eine Messung derselben konnte wegen der kurzen Dauer der Erscheinung nicht vorgenommen werden. Eine intensive Linie im Rot scheint identisch zu sein mit der am lumineszierenden Flußspat beobachteten.

b) Rosa *Topas* aus Mursinka (Rußland). Der Stein färbt sich in wenigen Stunden orangegegelb. Die Farbe wird nach etwa zwei Tagen stationär und erreicht ein leuchtendes tiefes Orange mit rötlichem Stich; sie ist gegen Erwärmung bis auf  $250^{\circ}$  unempfindlich. Keine Lumineszenz.

c) Blauer *Topas* aus Brasilien. Keine Farbenveränderung.

d) Gelber *Topas* vom Schneckenstein in Sachsen. Schwache Veränderung der Farbe in ein mehr rötlches Gelb. Keine Lumineszenz.

5. *Chrysoberyll*. a) Gelbgrüner Stein aus Ceylon. Keinerlei Veränderung.

b) *Chrysoberyll-Katzenauge* aus Ceylon. Der braungelbe Stein zeigt keinerlei Veränderung.

c) *Alexandrit-Chrysoberyll* aus Rußland. Der bei Tageslicht grüne, bei Gaslicht intensiv rote Stein zeigt keine Farbenveränderung.

6. *Turmalin*. Sehr merkwürdige Beobachtungen konnten bei verschiedenen Turmalinen gemacht werden. Während dunkel gefärbte Turmaline und zwar sowohl grüne als auch dunkelrote aus Brasilien, gelbgrüne aus Mursinka und tiefgrüne aus Nordamerika (?) keinerlei Farbenveränderung zeigten, ergaben farblose Turmaline starke Veränderungen. Es wurden zwei Turmalinkristalle aus Brasilien, von denen der eine am einen Ende rosa und der andere am einen Ende hellgrün gefärbt waren, während die beiden anderen Enden farblos waren, durchgeschnitten und die beiden farblosen Enden bestrahlt. Hierbei färbte sich der von dem grünen Kristall herührende farblose Anteil prächtig dunkelgrün, der von dem rosenroten Kristall stammende farblose Anteil rein rosenrot. Die Färbung schreitet sehr langsam fort und wurde bei dem erstgenannten Stein spurenweise nach zwei Tagen, beim letzten Stein nach etwa einem Tage sichtbar. Ein stationärer Zustand scheint noch nicht erreicht zu sein, obwohl die Bestrahlung mit reinem Radiumbromid 20 Tage lang fortgesetzt wurde.

7. *Quarz*. a) *Bergkristall*. Farblose Bergkristalle färben sich bei lang andauernder Bestrahlung sehr allmählich grau oder blaugrau. Steine von verschiedenen Fundorten zeigen ein etwas wechselndes Verhalten, doch ist in jedem Fall die Färbung sehr schwach und schreitet langsam vorwärts. Ein stationärer Zustand ist noch nicht eingetreten.

b) *Citrin*. Ein goldgelber Stein aus Spanien färbt sich langsam rauchgrau. Nach zehn Tagen wird die Färbung stationär und schreitet nicht mehr fort.

c) *Amethyst*. Steine aus Brasilien färben sich nach 20 tägiger Bestrahlung nicht merklich. Ein Stein aus einer Achatmandel aus Oberstein färbt sich langsam rötlichviolett, doch scheint die Farbenänderung, nachdem sie eben merklich geworden ist, nicht weiter fortzuschreiten.

d) Rauchquarz vom Gotthardt. Die Farbe des ursprünglich rauchgrauen Steines verändert sich in ein gelbliches Braun. Die Farbenänderung ist schwach und langsam. Sämtliche Quarze erhalten ihre ursprüngliche Färbung durch Erwärmung wieder, doch kehrt beim Citrin die ursprüngliche leuchtend gelbe Farbe nicht vollständig zurück. Keine merkbare Lumineszenz.

Die Versuche sollen weiter fortgesetzt werden, speziell soll das eigentümliche Verhalten der Saphire weiter untersucht werden.

(Eingegangen 10. Januar 1906.)

zweier Gase, insbesondere für ein Gemisch zweier Gase, insbesondere für ozonhaltigen Sauerstoff;<sup>1)</sup>

### 8. Der Wert des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen für ein Gemisch zweier Gase, insbesondere für ozonhaltigen Sauerstoff;<sup>1)</sup> von F. Richarz.

Bei einer auf meine Veranlassung ausgeführten Untersuchung, auf die ich weiter unten zurückkommen werde, mußte die Frage erörtert werden, wie der Wert des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen eines Gasgemisches abhängt von den Werten für die beiden Einzelgase und dem Mischungsverhältnis. Die Antwort ergibt sich folgendermaßen:

Man betrachte ein Gemisch zweier miteinander nicht reagierender Gase;  $m'$  sei die Menge des einen und  $m''$  die des anderen. Dann gilt für den Wärmeinhalt eines Gemisches der beiden die Mischungsregel, als auch für den Zuwachs des Wärmeinhaltes pro Grad Erwärmung, oder für die spezifische Wärme bei konstantem Volumen  $c_v$  des Gemisches in seiner Zusammensetzung aus den Werten  $c'_v$  und  $c''_v$  der beiden Bestandteile:

$$c_v = \frac{m' c'_v + m'' c''_v}{m' + m''}$$

oder bei Einführung des durch 100 dividierten Prozentgehaltes des einen Bestandteiles:

$$\mu = \frac{m''}{m' + m''}$$

wird:

$$(1) \quad c_v = c'_v + \mu (c''_v - c'_v)$$

Es seien ferner  $\epsilon'$ ,  $\epsilon''$ ,  $\epsilon$  die Dichtigkeiten der beiden Bestandteile bez. des Gemisches, alle bei gleichem Druck (1 Atmosphäre) und gleicher Temperatur gedacht. Dann gilt für die spezifischen Volumina oder für die reziproken Werte der

1) Vorläufige Mitteilung in dem Marburger Sitzungsber., Juli 1904, p. 57—61.

Dichtigkeiten, wenn noch die Gesamtvolumina vor der Mischung mit  $v'$  bez.  $v''$  bezeichnet werden:

$$\text{Die Dichten sind: } \frac{1}{\varepsilon'} = \frac{v'}{m'} \quad \frac{1}{\varepsilon''} = \frac{v''}{m''}$$

$$\text{Dann ist: } \frac{1}{\varepsilon} = \frac{v' + v''}{m' + m''} = \frac{m' \cdot \frac{1}{\varepsilon'} + m'' \cdot \frac{1}{\varepsilon''}}{m' + m''}$$

Für die spezifischen Volumina gilt also ebenfalls die Mischungsregel. Bei Einführung von  $\mu$  wird:

$$(2) \quad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon'} + \mu \left( \frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon''} \right)$$

Hieraus würde sich  $\mu$  als lineare Funktion von  $1/\varepsilon$  ergeben; diese in (1) eingesetzt, würde auch für  $c_v$  eines Gemisches eine lineare Funktion von  $1/\varepsilon$  ergeben, etwa gleich  $a + b/\varepsilon$ , und es wird also das Produkt  $\varepsilon c_v$  eine lineare Funktion von  $\varepsilon$  selbst.

Jetzt sind wir vorbereitet, für  $k = c_p/c_v$  eines Gemisches den gesuchten Schluß zu ziehen. Es ist allgemein, wenn  $R$  die Gaskonstante für die Masseneinheit,  $J$  das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet, nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik:

$$c_p - c_v = \frac{R}{J} = \frac{\text{Konstans}}{J \cdot \varepsilon}$$

wo der Wert der Konstante von der Beschaffenheit des Gases unabhängig ist. Es folgt also weiter:

$$c_v \cdot (k - 1) = \frac{\text{Konstans}}{J \cdot \varepsilon}$$

und

$$(3) \quad \frac{1}{k - 1} = \frac{J \cdot \varepsilon c_v}{\text{Konstans}}$$

Da nun aus den Gleichungen (1) und (2) folgte, daß  $\varepsilon c_v$  eine lineare Funktion von  $\varepsilon$  selbst ist, ist jetzt ersichtlich, daß also auch für ein Gemisch zweier Gase:

linearer Funktion von  $\varepsilon$  ist. Nennt man die Werte von  $k$  für die beiden Bestandteile  $k'$  und  $k''$ , so wird mithin:

$$\frac{1}{k - 1} = \frac{1}{k' - 1} + \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon'' - \varepsilon'} \left( \frac{1}{k'' - 1} - \frac{1}{k' - 1} \right)$$

oder auch:

$$\frac{1}{k-1} = \frac{s-s'}{s''-s'} \cdot \frac{1}{k''-1} + \frac{s''-s}{s''-s'} \cdot \frac{1}{k'-1}.$$

Durch diese Gleichung ist  $k$  als Funktion von  $s$  angegeben. Sie hätte umständlicher auch durch explizite Ausrechnung von  $s_c$ , als Funktion von  $s$  und Einsetzen in (3) abgeleitet werden können. Wenn man will, kann man auch noch vermöge der Gleichung (2) jetzt  $k$  als Funktion vom Prozentgehalt  $\mu$  ausdrücken.

Die Bestimmung von  $k$  für ozonhaltigen Sauerstoff und die Frage, wie aus ihr der Wert von  $k$  für reines Ozon berechnet werden könne, war es, wodurch die vorstehende theoretische Überlegung veranlaßt wurde. Direkt bestimmbar war jedesmal nur der Wert von  $k$  für ein Gemisch von Sauerstoff mit einem gewissen Prozentgehalt an Ozon. Diese Bestimmung hat Hr. A. Jacobs<sup>1)</sup> ausgeführt. Die Methode war diejenige der Kundtschen Staubfiguren. Diese wurden unmittelbar hintereinander von demselben Ton in derselben Röhre erzeugt, wenn diese einmal mit reinem Sauerstoff, sodann mit ozonisiertem gefüllt war. Aus dem Verhältnis der gemessenen Wellenlängen, dem der Dichtigkeiten, und dem als bekannt angenommenen Werte von  $k$  für reinen Sauerstoff folgte dann derjenige für den ozonhaltigen. Durch dieses Verfahren relativer und schnell einander folgender Messungen wurde man unabhängig von Änderungen des Luftdruckes und der Temperatur<sup>2)</sup>, welche ja die Schallgeschwindigkeit beider Gase in demselben Verhältnis beeinflußten.<sup>3)</sup> In bezug auf alle experimentellen Einzelheiten werde auf die Inauguraldissertation des Hrn. A. Jacobs verwiesen; erwähnt werde hier nur, daß die beste Konstanz der erregenden Tonhöhe mit folgendermaßen konstruierten Pfeifchen erzielt wurde. Zwei vorne spitz ausgezogene offene Glasmäppchen waren mit ihren Mündungen unter stumpfem Winkel vermittelst Messingdrähten so gegeneinander befestigt, daß ein

1) Artur Jacobs, Das Verhältnis  $k$  der beiden spezifischen Wärmen  $c_p/c_v$  von Ozon. Inauguraldissertation Marburg 1904.

2) Der Referent für die Beiblätter zu den Annalen (29. p. 951. 1905) hat dies übersehen.

3) Vgl. Kohlrausch, Lehrbuch p. 231, Formel 2, 1905.

durch die eine, längere, geblasener Luftstrom stehende Wellen in der anderen, nur einige Zentimeter langen, kürzeren erzeugte. Der Anblasestrom wurde von einem Blasebalg geliefert. Als Wert von  $k$  für reinen Sauerstoff wurde nach Lummer und Pringsheim<sup>1)</sup> 1,896 angenommen.

Der Gehalt an Ozon stieg im günstigsten Falle bis auf 8 Proz. Aus den direkt ermittelten Werten von  $k$  für den ozonhaltigen Sauerstoff wurde derjenige für reines Ozon extrapoliert unter Benutzung des oben abgeleiteten Resultates, daß  $1/k - 1$  eine lineare Funktion der Dichtigkeit  $\varepsilon$  des Gemisches ist. Auf diese Weise wurde für reines Ozon der Wert  $k = 1,29$  berechnet. Die Extrapolation würde natürlich bedeutend sicherer werden, wenn man mit höheren Ozongehalten arbeitete. Solche könnte man jetzt ja erreichen, indem man vermittelst flüssiger Luft sich zuerst flüssiges Ozon herstellt und dieses alsdann verdampfen läßt. Bei der Unzulänglichkeit der zur Verfügung stehenden Mittel können solche Versuche jedoch im hiesigen Institut nicht ausgeführt werden.

Marburg i. H., Physikal. Institut der Univ., im Jan. 1906.

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, British Association 1894.

(Eingegangen 16. Januar 1906.)

ausdrückt, und es ist möglich, daß er qualitativ richtig ist. 6) ist aus-

**9. Bemerkung zu der Arbeit  
des Hrn. Delere über die Wärmeentwicklung  
bei zyklischer Magnetisierung von Eisenkernen;<sup>1)</sup>**  
**von E. Warburg.**

Bei einer früheren Gelegenheit<sup>2)</sup> habe ich gezeigt, daß der reversible Wärmeeffekt, welcher nach Lord Kelvin die Magnetisierung des Eisens begleitet, zu der Wärmeerzeugung im Eisen bei magnetischen Kreisprozessen in keinem Fall etwas merkliches beitragen kann. Hr. Delere kommt zu einem anderen Ergebnis; er findet die „Thomsonwärme“ — so nennt er jenen reversiblen Wärmeeffekt — bei zyklischen Prozessen negativ und bis 15 Proz. der Hysteresiswärme. Zu diesem Ergebnis gelangt er durch folgenden Schluß.

Sei  $A_{12}$  die pro Volumeneinheit am Eisen geleistete Arbeit, wenn die Feldstärke bei konstanter Temperatur  $T$  von  $\mathfrak{H}_1$  bis  $\mathfrak{H}_2$  steigt, also

$$(1) \quad A_{12} = - \int_{\mathfrak{H}_1}^{\mathfrak{H}_2} J d\mathfrak{H},$$

wo  $J$  die Intensität der Magnetisierung. Dann ist nach dem Carnotschen Prinzip die bei diesem Vorgang in der Volumeneinheit des Eisens entwickelte Wärme

$$(2) \quad Q = T \cdot \frac{\partial A_{12}}{\partial T}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß der Vorgang bei der Magnetisierung reversibel ist, d. h. also, daß bei isothermer Zustandsänderung  $J$  eine einwertige Funktion von  $\mathfrak{H}$  ist. Für einen isothermen magnetischen Kreisprozeß ist dann  $A_{12}$  und  $Q = 0$ .

Hr. Delere operiert aber mit der Gleichung (2) in der Weise, daß er sie auf den Fall der Hysteresisschleife anwendet, für welchen die genannte notwendige Voraussetzung der Gle-

1) Inaug.-Diss. Münster, Ref. Prof. Heydweiller; auch Beibl. 29.  
p. 1166. 1905.

2) E. Warburg u. L. Höning, Wied. Ann. 20. p. 814. 1888.

chung (2) nicht mehr besteht, und gelangt so zu dem auffallenden Ergebnis, daß die „Thomsonwärme“ mit der Temperaturvariation der Hysteresisschleifenfläche proportional ist, während doch die Hysteresis zu der Thomsonwärme in gar keiner Beziehung steht.

Um diese Schlußweise noch etwas näher zu beleuchten, will ich annehmen, daß ein elastisches Band, etwa ein Kautschukband, an einem Ende befestigt, am anderen an einen auf dem Tisch liegenden Klotz geknüpft sei. Bewegt man nun den Klotz hin und her, so daß das Band abwechselnd gedehnt und wieder verkürzt wird, so entsteht der bekannte reversible Wärmeeffekt im Kautschuk und es besteht bei isothermer Zustandsänderung auch hier die Gleichung (2), indem  $A_{12}$  die an dem Systeme geleistete Arbeit bedeutet, während das Band um  $l_2 - l_1$  verlängert wird; vorausgesetzt, daß zwischen dem Klotz und dem Tisch keine Reibung stattfindet. Die bei einem isothermen Kreisprozeß im Band entwickelte reversible Wärme ist mithin auch hier Null und bleibt natürlich Null, auch wenn zwischen Klotz und Tisch Reibung stattfindet. Dann aber gilt die Gleichung (2) nicht mehr und es ist jetzt für den Kreisprozeß  $A_{12} = 2R(l_2 - l_1)$ , wo  $R$  die Reibung bedeutet. Wenn nun diese mit steigender Temperatur abnähme, so würde dadurch nach der Schlußweise des Hrn. Delere bei dem Kreisprozeß eine Wärmeabsorption im Kautschukband entstehen.

Demnach hat Hr. Delere sich wohl etwas übereilt, als er behauptete, durch seine Schlüsse die „Unrichtigkeit“ meines Resultates erwiesen zu haben.

Charlottenburg, Januar 1906.

(Eingegangen 1. Februar 1906.)

seitlich ab und oben ist ebenfalls am Rande nach abwärts abgedreht s. Abbildung auf der Seite dazu dient mit einer solchen Seite das System mehr oder weniger gut abgedichtet.

### 10. Schutzvorrichtung für die Kauffmannsche Luftpumpe; von P. H. Eykman.

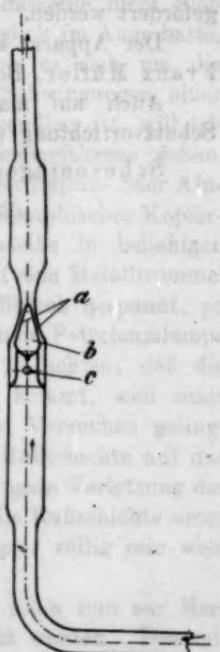
In dem hiesigen Laboratorium des Hrn. Trivelli wurde es sehr schwer empfunden, als gelegentlich der Evakuierung einer größeren Glasglocke dieselbe zusammenbrach und die Luft mit großer Kraft in die Kauffmannsche Luftpumpe hineinstürzte und selbige zerbrach.

Nun wird vom Fabrikanten gewarnt vor plötzlichem Luft-einlaß in genannte Luftpumpe und darum angeraten, nach dem Gebrauch die Pumpe solange zurück-zudrehen, bis mindestens eine der Spiralen quecksilber leer geworden ist. Daß dies aber noch nicht vollkommen genügt, bewies der jetzige Fall, da noch nicht einmal die Kauffmannsche Pumpe in Wirkung gesetzt und die Spirale also vollkommen leer war und doch ein Zerbrechen des Glaskörpers durch Stoß des Quecksilbers erfolgte.

Darum sei hier folgender Vorschlag mitgeteilt, welcher bezweckt, eine sanfte Luftströmung zu ermöglichen, einen plötzlichen Stoß aber zurückzuhalten.

In der Leitung an zwei Stellen, d. h. vor und nach der Kauffmannschen Luftpumpe, wird der nebenstehende Glasapparat eingeschaltet. Er besteht wesentlich aus einem Ventil mit beschränkter Beweglichkeit. Die Luftsaugung geschieht in der Pfeilrichtung.

Eine Glasbirne *b* schließt, wenn sie ungefähr 1 mm nach oben bewegt wird, die Leitung ab und ihre Oberfläche sowie die Berührungsfläche des Glasrohres sind beide mattgeschliffen. *c* ist eine Öffnung,



welche in dem Zylinderchen angebracht ist, welches die Glasbirne im weiteren nach unten fallen verhindert; c stellt also die Kommunikation her zwischen dem unteren und oberen Teile der Leitung.

Wirkt wie beim gewöhnlichen Pumpen ein sanfter Luftstrom, dann entweicht die Luft der Birne entlang durch a. Ein kräftiger Luftstrom aber stößt die Birne mit Kraft nach oben, schließt a und sperrt sich den Weg ab.

Die Schließung braucht nicht absolut zu sein, so daß nach einigen Minuten doch ein Druckausgleich erfolgen kann. Ist das geschehen, so fällt die Birne durch ihre Schwere von selbst herab, was noch durch Abklopfen gegen die unten umgebogene Röhre gefördert werden kann. Wird die Birne stumpfer genommen als hier gezeichnet, kann das Absfallen eben sehr gefördert werden.

Der Apparat ist angefertigt von Dr. H. Geissler Nachf., Franz Müller, Bonn.

Auch auf manchem anderen Gebiete ließe sich diese Schutzvorrichtung verwenden.

Scheveningen, Januar 1906.

(Eingegangen 19. Januar 1906.)

11. Ein neues Verfahren zur photographischen  
Fixierung der Aufzeichnungen von Stimmgabeln,  
der Fallkörper von Fallmaschinen,  
von Meteorographen etc.;  
von Raimund Nymführ.

---

Bemühungen um die Vermeidung gewisser Übelstände, welche der bisherigen Methode der Fixierung der Aufzeichnungen von Meteorographen für unbemannte Freiballons anhafteten, führten mich zur Auffindung eines neuen ebenso einfachen wie praktischen Verfahrens. Da dasselbe nicht bloß für den speziellen Zweck, den ich ursprünglich im Auge hatte, sondern auch in allen jenen Fällen, wo es sich um die dauernde Fixierung von Aufzeichnungen (Schwingungen einer Stimmgabel etc.) handelt, mit Vorteil verwendbar ist, will ich eine kurze Beschreibung des neuen Fixierverfahrens geben.

An Stelle der bisher meist verwendeten Papier- oder Aluminiumfolie nehme ich gewöhnliches photographisches Kopierpapier (Zelloidinpapier). Man erhält dasselbe in beliebigen Formaten im Handel. Das Papier wird auf eine Metalltrommel oder ein entsprechend großes Stück Metallblech gespannt, so daß es glatt anliegt, und dann mittels einer Petroleumlampe sorgfältig brennt. Man hat dabei nur zu achten, daß die Flamme dem Papier nicht gar zu nahe kommt, weil sonst leicht Flecken entstehen. Nach ein, zwei Versuchen gelingt es leicht, eine vollkommen gleichförmige Rußschicht auf das Papier zu bringen, und zwar ohne die geringste Verletzung der lichtempfindlichen Schicht. Wäscht man die Rußschicht unter einer Wasserleitung weg, so muß das Papier völlig rein weiß erscheinen.

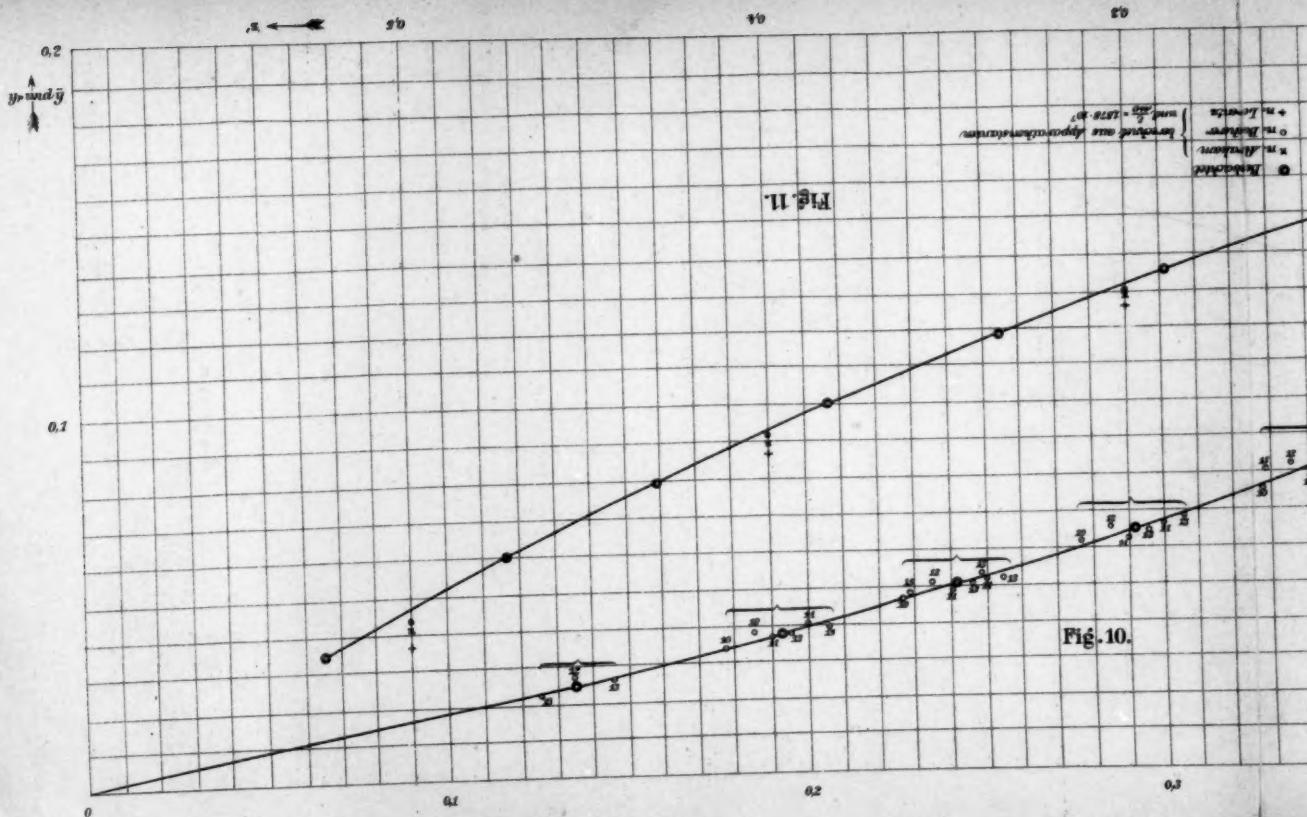
Ein derartig hergerichteter Zylinder kann nun zur Herstellung beliebiger Aufzeichnungen benutzt werden. Das mit Ruß überzogene photographische Papier ist fast vollkommen lichtunempfindlich. Man kann deshalb auch in vollem Tageslicht arbeiten.

Die Fixierung der Aufzeichnungen erfolgt in folgender Weise: Man stellt die Registriertrommel einige Zeit in die Sonne oder belichtet wenigstens die Kurven in vollem Tageslicht, bis sie ganz dunkel geworden sind und sich von der Rußschichte kaum mehr abheben. Dann wird die Trommel mittels Watte unter einer Wasserleitung oder einfach in einem Wasserbecken rein abgewaschen, bis die Rußschichte völlig entfernt ist und das Papier rein weiß erscheint. Nun legt man dasselbe in ein Fixierbad (wässrige Lösung von unterschwefligsaurem Natron) und wäscht das Bild im Wasser aus. Man behandelt also die Aufzeichnungen genau so wie eine gewöhnliche photographische Kopie. Die Zeichnungen (braun-schwarze Linien auf weißem Grunde) sind von überraschender Feinheit und es werden die feinsten Striche deutlich reproduziert. Die Aufzeichnungen machen ganz den Eindruck einer photographischen Kopie.

**Wien, Hohe Warte, k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.**

(Eingegangen 28. Januar 1906.)





Kaufmann.

